Análisis de Sistemas No Lineales

Problemas del Capítulo 2

Problema 2.1. Muestre que el elemento nulo de un espacio vectorial lineal es único. Ayuda: suponga que el espacio vectorial lineal tiene dos elementos nulos 0_1 y 0_2, y utilice el Axioma (V3).

Problema 2.2. Muestre que en un espacio vectorial lineal, la inversa aditiva de un elemento es única.

Problema 2.3. Dé un ejemplo de un conjunto que *no* sea un espacio vectorial lineal.

Problema 2.4. Sea *S* el espacio de las sucesiones del Ejemplo (5), y defina un subconjunto S_r de *S* como el conjunto de todas las sucesiones que convergen a *r*. ¿Para qué valores de *r* es S_r un espacio vectorial lineal?

Problema 2.5. (*a*) Considere el espacio lineal normado $\mathbb{R}^2$, con la norma $\|\cdot\|_p$ definida en el Ejemplo (13). Grafique las esferas unitarias, i.e. los conjuntos $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 : \|\cdot\|_p = 1\}$ para $p = 1, 2, 5, \infty$.

(*b*) Grafique la esfera unitaria para $p = 1/2$, i.e., $\{\mathbf{x} = (x, y)\in\mathbb{R}^2 : (|x|^{1/2} + |y|^{1/2})^2 = 1\}$. ¿Es ésta una norma $\|\cdot\|_p$, con $p = 1/2$?

Problema 2.6. (*a*) Sea $\|\cdot\|$ una norma cualquiera en $\mathbb{R}^n$, y sean $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ cualquier colección de vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestre, utilizando la desigualdad triangular, que $\left\|\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i\right\| \le \sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{x}_i\|$.

(*b*) Sea $C^n[a,b]$ como en el Ejemplo (30). Utilizando la aproximación de Riemann de la integral, muestre que $\left\|\int_a^b \mathbf{x}(t)dt\right\| \le \int_a^b \|\mathbf{x}(t)\| dt$.

Ayuda: La aproximación de Riemann de la integral expresa que

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\max\Delta_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} x(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

donde $a = t_0 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = b$ es una partición arbitraria del intervalo $[a,b]$, el punto ξ_i es un punto perteneciente al intervalo (t_{i-1}, t_i) (i.e., $t_{i-1} < \xi_i < t_i$), y $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$.

Problema 2.7. Demuestre la desigualdad de Schwartz para espacios vectoriales lineales complejos con producto interno.

Problema 2.8. Suponga que $(X, <\cdot,\cdot>)$ es un espacio vectorial lineal con producto interno. Demuestre que la función producto interno es continua en sus dos argumentos, i.e. muestre que si $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ son dos sucesiones en *X* que convergen a x_0, y_0, respectivamente, entonces la sucesión de números reales $\{<x_i, y_i>\}$ converge a $<x_0, y_0>$.

Ayuda: escriba

$$<x_i, y_i> - <x_0, y_0> = <x_i, y_i> - <x_0, y_i> + <x_0, y_i> - <x_0, y_0>$$

y aplique la desigualdad de Schwartz.

Problema 2.9. Suponga que *X* e *Y* son espacios vectoriales lineales normados, y que $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$. Suponga que $\{x_i\}$ es una sucesión en *X* que converge a x_0. Demuestre que la sucesión $\{f(x_i)\}$ converge a $f(x_0)$.

Problema 2.10. Calcule las normas matriciales inducidas $\|\mathbf{A}\|_i$ y las medidas $\mu_i(\mathbf{A})$ correspondientes a las normas vectoriales $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ para cada una de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule las cotas sobre la parte real de los autovalores de las matrices utilizando la propiedad (M6) del Teorema (16), y compare con los resultados exactos.

Problema 2.11. Sea $\|\cdot\|$ una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$. Defina $\|x\|_P \triangleq \|\mathbf{P}x\|$, donde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz real no singular, y sea $\mu_P(\cdot)$ la medida definida en función de la norma inducida correspondiente. Muestre que $\mu_P(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{PAP}^{-1})$.

Problema 2.12. Demuestre el Teorema (2.2.35).

Problema 2.13. Demuestre detalladamente el Teorema (2.3.22).

Problema 2.14. Muestre que la continuidad Lipschitz es independiente de la norma adoptada en $\mathbb{R}^n$. Para ser más precisos, sean $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ dos normas en $\mathbb{R}^n$. Muestre que para cada *T* finito, existe una constante finita k_{aT} tal que

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|_a \le k_{aT}\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_a, \ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,T],$$

si y sólo si para cada *T* finito existe una constante finita k_{bT} tal que

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|_b \le k_{bT}\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_b, \ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,T].$$

Problema 2.15. (*a*) Sea $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en su segundo argumento. Muestre que *f* satisface (2.4.26) si y sólo si para cada *T* finito existe una constante finita k_T tal que

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \le k_T, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T],$$

i.e., $|\partial f(t,x)/\partial x|$ está acotada independientemente de *x* sobre cada intervalo finito [0, *T*]. Ayuda: utilice el Teorema del valor medio.

(*b*) Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en su segundo argumento. Muestre que **f** satisface (2.4.26) si y sólo si para cada *T* finito existe una constante finita k_T tal que

$$\left|\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_j}\right| \le k_T, \ \ \forall i,j, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,T].$$

Ayuda: utilice los resultados del Problema 2.14.

Problema 2.16. Determine si las siguientes funciones son globalmente Lipschitz continuas:

(*a*) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1x_2 \\ 2x_1 - x_2^2 \end{bmatrix}$

(*b*) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1\, e^{-x_2^2} \\ x_2\, e^{-x_1^2} \end{bmatrix}$