Análisis de Sistemas No Lineales

Problemas del Capítulo 3

Problema 3.1. Demuestre la relación

$$t_f = t_0 + \int_C \frac{dx_1}{x_2}$$

Ayuda: Use la ecuación (5) para escribir $x_1(t+\Delta t) = x_1(t) + \Delta t\, x_2(t) + o(\Delta t)$.

Problema 3.2. Muestre que si C es una trayectoria solución de $\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2)$ que pasa por un punto **x**, entonces el campo vectorial **f(x)** es tangente a **C** en **x**. Ayuda: exprese la ecuación diferencial como

$$\begin{aligned} x_1(t+\Delta t) &= x_1(t) + \Delta t\, f_1[x_1(t), x_2(t)] + o(\Delta t) \\ x_2(t+\Delta t) &= x_2(t) + \Delta t\, f_2[x_1(t), x_2(t)] + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Problema 3.3. Determine si la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

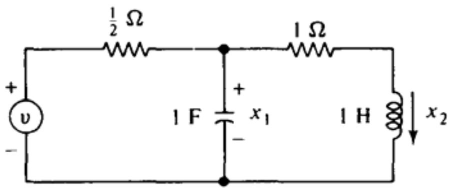
$$f = \begin{pmatrix} x_2 + (1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \\ -x_1 + (1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \end{pmatrix}$$

es un campo vectorial. Justifique. Ayuda: considere el comportamiento de **f** cerca del origen.

Problema 3.4. Obtenga la expresión de la trayectoria en el plano de estados para el nodo impropio (3.2.13), en función de z_1, z_2, z_{10} y z_{20}, eliminando el tiempo *t* de la solución

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} e^{\lambda t} + z_{20} t e^{\lambda t}, \\ z_2(t) &= z_{20} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Problema 3.5. Para el circuito eléctrico de la figura,



(*a*) Elija como variables de estado x_1, x_2 la tensión en el capacitor y la corriente en la bobina, respectivamente, y muestre que la red se puede describir con las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 + 2v \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

(*b*) Suponga que $v(t) \equiv 0$. Determine la naturaleza del equilibrio en $(0,0)$, y encuentre la matriz **M** que transforma las ecuaciones anteriores en la forma canónica apropiada.

Problema 3.6. Suponga que la resistencia de ½ Ohm del circuito del problema 3.5 se reemplaza por una resistencia genérica de valor *R*.

(*a*) Escriba las ecuaciones de estado de la red para $v(t) \equiv 0$.

(*b*) Determine para qué valores de *R* el equilibrio (0, 0) es (*i*) un nodo, (*ii*) un foco, (*iii*) una silla.

Problema 3.7. Para cada una de las matrices **A** que se listan a continuación,

(*a*) Determine la matriz **M** que transforma a **A** en la forma canónica apropiada.

(*b*) Bosqueje las trayectorias en el plano de estado tanto en las coordenadas $z_1 - z_2$ como en las coordenadas $x_1 - x_2$.

(c) Clasifique el tipo de equilibrio que exhibe el sistema en (0, 0).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Problema 3.8. Encuentre todos los puntos de equilibrio de las ecuaciones de Volterra que modelan un sistema predador-presa

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2 - x_1 x_2$$

Linealice el sistema alrededor de cada uno de los puntos de equilibrio, y determine -si es posible- la naturaleza del equilibrio (Respuesta: un centro, una silla).

Problema 3.9. En el circuito eléctrico que se muestra en la figura, suponga que la relación tensión-corriente del resistor no lineal está dada por

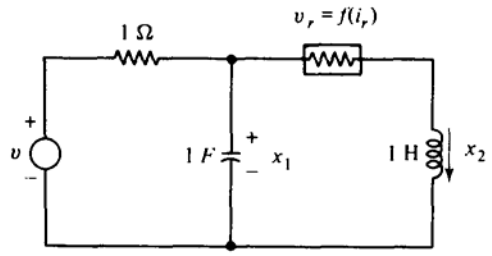
$$v_r = f(i_r) = i_r^3 - 3i_r^2 + 3i_r\,.$$

(a) Seleccione como variables de estado x_1, x_2 la tensión en el capacitor y la corriente en la bobina, respectivamente, y muestre que las ecuaciones de estado son

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + v$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - f(x_2)$$

(b) Calcule los puntos de equilibrio del sistema para $v = 0$.

(c) Linealice el sistema alrededor de cada punto de equilibrio, y determine la naturaleza de cada uno.



Problema 3.10. Considere un sistema mecánico formado por una masa unitaria, un resorte no lineal, y un amortiguador no lineal. Tal sistema puede ser modelado por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2),$$

donde x_1 es la posición de la masa, $g(\cdot)$ la fuerza restauradora del resorte, y $h(\cdot)$ la fuerza de amortiguación ejercida por el amortiguador. Suponga que tanto $g(\cdot)$ como $h(\cdot)$ son continuamente diferenciables. Aplicando el Teorema de Bendixon, muestre que este sistema no tiene soluciones periódicas si $h'(\xi) \neq 0$ para todo ξ, es decir, que siempre hay un cierto nivel de amortiguamiento cuando la masa está en movimiento.

Problema 3.11. Esboce un campo vectorial con un nodo y una silla. Muestre que no es posible deformar continuamente el campo vectorial de modo que exista una solución periódica que encierre el nodo y la silla.

Problema 3.12. Empleando la técnica analítica de la Sección 3.3.5, muestre que el sistema mecánico sin amortiguamiento formado por una masa unitaria y un resorte no lineal, descrito por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -g(x_1),$$

siempre tiene un continuo de soluciones periódicas si $x_1 g(x_1) > 0$ para todo $x_1 \neq 0$. Derive una expresión para estar trayectorias cerradas.

Problema 3.13. Aplique el método de Krylov-Boguliubov a la ecuación de Rayleigh

$$\ddot{y} + y = \mu\left(\dot{y} - \tfrac{1}{3}\dot{y}^3\right)$$

Resuelva la misma ecuación utilizando el método de las perturbaciones, y muestre que ambos métodos dan la misma solución hasta términos de primer orden en μ.

Problema 3.14. Aplique el método de perturbación a la ecuación de Van der Pol $\ddot{y} + y = \mu\dot{y}(1 - y^2)$.

Problema 3.15. Aplique el método de Krylov-Boguliubov a la ecuación del péndulo $\ddot{y} + y - \frac{1}{6}y^3 = 0.$ Calcule la expresión para la frecuencia de oscilación ω_0 en función de la amplitud *a* de la oscilación, y compárela con la obtenida por el método de perturbaciones (ecuación 3.4.52, p. 86. Note que tanto en esta expresión, como en la 3.4.46 hay un error, ya que de 3.4.45 resulta que $\xi_1 = 3a^2/4$).

Problema 3.16. **Teorema de Dulac** (generalización del teorema de Bendixon). En un sistema dinámico planar $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$, $t \geq 0$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ no existen órbitas dentro de una región *D* cerrada y simplemente conexa si $\nabla(q\mathbf{f})$ no cambia de signo o se anula sobre *D*, donde $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función suave.

(*a*) Demuestre el Teorema de Dulac.

(*b*) Para el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1^2 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1 x_2. \end{aligned}$$

determine (si es posible) la existencia de soluciones periódicas aplicando el Teorema de Bendixon.

(*c*) Repita el inciso anterior aplicando el Teorema de Dulac, con $q(x_1, x_2) = -(1 + x_2)^{-3}(1 + x_1)^{-1}$. Observe que $\nabla\left(q\mathbf{f}\right)$ cambia de signo en $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$; encuentre conjuntos invariantes que permitan descartar órbitas periódicas que crucen regiones donde $\nabla\left(q\mathbf{f}\right)$ cambia de signo.

Problema 3.17. Aplicando las técnicas presentadas en este capítulo, esboce el diagrama del plano de fase para los siguientes sistemas:

(*a*)
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (2 - x_1 - 2x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (2 - 2x_1 - x_2)x_2, \end{aligned}$$

en el cuadrante positivo $(x_1 > 0, x_2 > 0)$.

Ayuda: encuentre líneas en el plano $x_1 - x_2$ que sean invariantes, ubique los puntos de equilibrio, etc.