Análisis de Sistemas No Lineales

Problemas del Capítulo 5

Problema 5.1. En este ejercicio se generaliza el Ejemplo 5.1.18 (p. 138) desarrollando una clase de sistemas no lineales con un equilibrio *estable* en $t = 0$, pero no *uniformemente* estable. Para la ecuación diferencial escalar $\dot{x}(t) = a(t)\,x(t),\ \forall t \geq 0$, donde $a(t)$ es una función continua,

(a) verifique que la solución general de esta ecuación es

$$x(t) = x(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right).$$

(b) Demuestre utilizando la Definición 5.1.9 (p. 136) que el equilibrio 0 es *estable* si y sólo si

$$\sup_{t\geq 0} \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) \doteq m(t_0) < \infty .$$

Nota: en este caso, la propiedad 5.1.10, (p. 136) se verifica con $\delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon / m(t_0)$.

(c) Aplicando la Definición 5.1.9 (p. 136), muestre que el equilibrio 0 es *uniformemente estable* si y sólo si $m(t_0)$ es acotada como función de t_0.

(d) Construya varias funciones $a(\cdot)$ tales que $m(t_0)$ sea finita para cada t_0 finito, pero que no esté acotada como función de t_0.

Problema 5.2. Construya sistemas similares al 5.1.33 (p. 141) en los que el origen sea atractivo pero no estable.

Problema 5.3. Complete la demostración del Teorema 5.1.53 (p. 145).

Problema 5.4. Complete la demostración del Lema 5.1.57 (p. 145).

Problema 5.5. Determine si cada una de las siguientes funciones es (i) localmente positiva definida (lpd), (ii) positiva definida (pd), (iii) decreciente, (iv) radialmente no acotada (rna).

(a) $x_1^4 + x_2^4$

(b) $x_1^2 + x_2^4$

(c) $\left(x_1 + x_2^2\right)^2$

(d) $t\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

(e) $\left(x_1^2 + x_2^2\right) / (t+1)$

(f) $\operatorname{sen}^2\left(x_1 + x_2\right) + \operatorname{sen}^2\left(x_1 - x_2\right)$

Problema 5.6. La función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está definida por $V(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{M}(t)\mathbf{x}$, donde $\mathbf{M}(t)$ es una función continua, real y simétrica para cada *t*. Determine condiciones necesarias y suficientes para que *V* sea (i) positiva definida, (ii) decreciente.

Problema 5.7. Complete la demostración del Lema 5.2.6 (p. 148).

Problema 5.8. Complete la demostración del Lema 5.2.9 (p. 149).

Problema 5.9. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, y $S(t_0, \mathbf{x}_0)$ la trayectoria solución $\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left[t, \mathbf{x}(t)\right]$, $\forall t \geq 0$ vista como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (vea el párrafo posterior a la Definición 5.2.25, p. 151). Pruebe que $S(t_0, \mathbf{x}_0)$ es un conjunto invariante.

Problema 5.10. Suponga que el origen del sistema no autónomo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t)], \forall t \geq 0$ es uniformemente atractivo en el sentido de la Definición 5.1.27 (p. 140). Si el dominio de atracción $D(\mathbf{0})$ se define como

$$D(\mathbf{0}) = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \exists\, t_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty \right\},$$

¿continúa siendo válido el Lema 5.2.45 (p. 154)? Justifique su respuesta.

Problema 5.11. Se desea analizar la estabilidad de un equilibrio de la forma $(x_0, 0, 0)$ para el sistema del Ejemplo 19 (p. 161), donde $x_0 \neq 0$. Efectúe un cambio de coordenadas de modo que el equilibrio bajo estudio sea el origen del nuevo sistema. Defina una función de Lyapunov apropiada de modo que la estabilidad del equilibrio pueda deducirse a partir de la aplicación del Teorema 5.3.14 (p. 159). Repita para un equilibrio de la forma $(0, 0, z_0)$, donde $z_0 \neq 0$.

Problema 5.12. Analice el circuito del Ejemplo 5.3.43 (p. 168) para el caso en el que las capacidades son no lineales. La carga q_i del *i*-ésimo capacitor es una función (posiblemente no lineal) de la tensión x_i, tal que $q_i(x_i) = 0$ si y sólo si $x_i = 0$. Defina $C_i(x_i) \doteq \partial q_i(x_i)/\partial x_i$, y suponga que existen constantes α_i y β_i tales que $0 < \alpha_i \leq C_i(x_i) \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Analice la estabilidad del equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ utilizando la energía total almacenada en los capacitores como función candidato de Lyapunov.

Problema 5.13. Una partícula de masa m se mueve en un campo potencial suave; para simplificar el problema, se supone que el movimiento es unidimensional. Si x la posición de la partícula, $\phi(x)$ la energía potencial en x, y si la fuerza actuante sobre la partícula se debe únicamente al campo potencial, el movimiento de la partícula se puede describir por la ecuación diferencial $m\ddot{x} = -\phi'(x) \doteq f(x)$, donde $\phi'(x) = \partial\phi(x)/\partial x$. Demuestre que cada mínimo local de la función $\phi(\cdot)$ es un equilibrio estable.

Problema 5.14. Si $\mathbf{f}$ es un campo vectorial continuo tal que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, existe una función matricial continua $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (Lema 2.5.17, p. 51). Para la ecuación diferencial autónoma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$,

(*a*) muestre que el origen es un equilibrio *localmente exponencialmente estable* si la matriz $\mathbf{A}'(\mathbf{0}) + \mathbf{A}(\mathbf{0})$ es negativa definida. (**Ayuda:** considere la función candidato de Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.) Generalice la deducción mostrando que el origen es *exponencialmente estable* si existe una matriz $\mathbf{P}$ positiva definida tal que $\mathbf{A}'(\mathbf{0})\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{A}(\mathbf{0})$ sea negativa definida.

(*b*) Extienda los resultados del inciso (*a*) para el caso de *estabilidad global*.

Problema 5.15. Lleve la ecuación diferencial $\ddot{y}(t) + f[y(t)]\dot{y}(t) + g[y(t)] = 0$ a la forma de variables de estado eligiendo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, y demuestre que el equilibrio $\mathbf{0}$ es

(*a*) *estable* si las funciones *f* y *g* son continuas, y satisfacen las siguientes condiciones para algún número positivo δ:

$$g(0) = 0, \quad \sigma g(\sigma) > 0, \forall \sigma \in (-\delta, \delta), \quad \text{y} \quad f(\sigma) \geq 0, \quad \forall \sigma \in (-\delta, \delta);$$

(*b*) *asintóticamente estable* si las funciones *f* y *g* cumplen con los requisitos del inciso (*a*), y si además *f* satisface la condición (más restrictiva)

$$f(\sigma) > 0, \quad \forall \sigma \in (-\delta, \delta);$$

(*c*) *exponencialmente estable* si además de las condiciones del inciso (*b*) las funciones *f* y *g* son continuamente diferenciables.

(*d*) Encuentre condiciones apropiadas sobre las funciones *f* y *g* para asegurar estabilidad *asintótica global* y estabilidad *exponencial global*.

Problema 5.16. Utilizando la función candidato de Lyapunov $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$, demuestre que el equilibrio $\mathbf{0}$ del sistema $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 x_2 + x_2^2$ es inestable.

Problema 5.17. Demuestre que el **0** es un equilibrio inestable del sistema $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1^2 - 2x_1x_2$ utilizando la función candidato de Lyapunov $V(\mathbf{x}) = x_1^2\left(x_1 - x_2\right)$.

Problema 5.18. Complete la demostración del Teorema 5.4.14 (p. 195).

Problema 5.19. Encuentre una matriz **A** Hurwitz y una matriz **P** positiva definida tales que $\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{A}$ no sea negativa definida.

Problema 5.20. Una red RLC que no contiene lazos capacitivos ni cortes inductivos puede ser descripta en la forma de variables de estado eligiendo como estados las tensiones en los capacitores y las corrientes en las inductancias. Sea $\mathbf{x}_C$ el vector de las tensiones en los capacitores, y $\mathbf{x}_L$ el vector de las corrientes en las bobinas. El sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_C \\ \dot{\mathbf{x}}_L \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_L \end{bmatrix},$$

donde **C** es la matriz diagonal positiva definida de los valores de los capacitores, **L** es la matriz positiva definida de las inductancias (no necesariamente diagonal, pero sí simétrica ya que incluye las inductancias mutuas), y las $\mathbf{R}_{ij}$ son las matrices que resultan de la subred resistiva, con $\mathbf{R}_{11}$ y $\mathbf{R}_{22}$ simétricas, y $\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{R}_{21}$ si la red es recíproca. Utilizando como función candidato de Lyapunov la energía total almacenada en las inductancias y en los capacitores, muestre que el equilibrio **0** es

(*b*) *estable* si $\mathbf{R}_{11}$ y $\mathbf{R}_{22}$ son no negativas definidas (o semipositiva definidas: $\mathbf{x}'\mathbf{R}_{ii}\mathbf{x} \ge 0$);

(*a*) *asintóticamente estable* si $\mathbf{R}_{11}$ y $\mathbf{R}_{22}$ son (ambas) positivas definidas ($\mathbf{x}'\mathbf{R}_{ii}\mathbf{x} > 0$).

Problema 5.21. En base a los resultados de la Sección 5.4.3, determine si el equilibrio **0** del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ es uniformemente estable o uniformemente asintóticamente estable, si

(*a*) $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -2 + \operatorname{sen}^2 t & 1 \\ \cos t & -1 \end{bmatrix}$, (*b*) $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -2 + \operatorname{sen} t^2 & 1 \\ \cos t & -1 \end{bmatrix}$ (*c*) $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 2t - t^2 & 1 - t & 3 + t \\ t^2 & -t^3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 - t \end{bmatrix}$.

Problema 5.22. El equilibrio **0** del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left[t, \mathbf{x}(t)\right], \forall t \ge 0$ se dice *acotado* si para cada $\delta > 0$ y cada $t_0 > 0$, existe un $\varepsilon = \varepsilon(\delta, t_0)$ tal que $\|\mathbf{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \left\|\mathbf{s}\left(t, t_0, \mathbf{x}_0\right)\right\| < \varepsilon,\ \forall t < t_0$. Se dice que es *uniformemente acotado* si para cada $\delta > 0$ existe un $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que $\|\mathbf{x}_0\| < \delta, t_0 \ge 0 \;\Rightarrow\; \left\|\mathbf{s}\left(t, t_0, \mathbf{x}_0\right)\right\| < \varepsilon$, $\forall t < t_0$.

(*a*) Demuestre que un sistema *lineal* es acotado si y sólo si es estable, y que es uniformemente acotado si y sólo si es uniformemente estable.

(*b*) Construya ejemplos de sistemas no lineales donde el equilibrio **0** sea estable y no acotado, y donde el equilibrio **0** sea acotado e inestable.

Problema 5.23. Generalice el Teorema 5.4.18 para una clase de sistemas no lineales. Suponga que existe un número $d > 0$ tal que las trayectorias solución del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left[t, \mathbf{x}(t)\right], \forall t \ge 0$ satisfacen la cota $\left\|\mathbf{s}\left(t, t_0, \mathbf{x}_0\right)\right\| \le \mu \|\mathbf{x}_0\| \sigma\left(t - t_0\right)$, $\forall \mathbf{x}_0 \in B_d, \forall t \ge t_0 \ge 0$, donde μ es una constante positiva, y $\sigma(\cdot)$ es una función de clase L. Demuestre que el equilibrio **0** es *exponencialmente estable*.

Problema 5.24. Para una colección finita de matrices $n \times n$ $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$, se define el cascarón convexo ("convex hull") como el conjunto

$$S = \left\{ \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{A}_i : \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

(*a*) Suponga que existe una matriz **P** positiva definida tal que $\mathbf{A}_i'\,\mathbf{P}' + \mathbf{P}\,\mathbf{A}_i$ es negativa definida para $i = 1, 2, \ldots, k$. Demuestre que cada matriz en el conjunto *S* es Hurwitz.

(b) Muestre que el equilibrio **0** de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{A}(t) \in S \quad \forall t \geq 0$ es *exponencialmente estable*.

Problema 5.25. Verifique la estabilidad de los sistemas de los Problemas 5.11 a 5.16 utilizando el método de linealización.

Problema 5.26. Suponga que el equilibrio **0** del sistema realimentado descrito por $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$, $u(t) = -\phi[\mathbf{c}'\,\mathbf{x}(t)]$, donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, es *asintóticamente estable* cuando ϕ es una función *lineal* de la forma $\phi(\sigma) = k\sigma$, $k \in [0, \mu]$.

(a) En base al Corolario 5.5.26 (p. 213), muestre que el **0** sigue siendo un equilibrio asintóticamente estable si $\phi(\cdot)$ es cualquier función continua cuya derivada queda comprendida en el intervalo $[0, \mu]$ para un entorno del origen.

(b) Generalice los resultados del inciso (a) para el caso de sistemas variantes en el tiempo, empleando el Teorema 5.5.15, p. 211.

Problema 5.27. Para el sistema realimentado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{u}(t) &= -\phi[t, \mathbf{y}(t)],\end{aligned}$$

con

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

determine, utilizando el criterio del círculo, diferentes intervalos [a, b] tales que el sistema realimentado sea *globalmente exponencialmente estable* para toda $\phi(\cdot)$ perteneciente al sector [a, b].

Problema 5.28. Para el sistema realimentado del Problema 5.27, con

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{1}{(s-1)(s+3)^2},$$

utilice el criterio del círculo para determinar números $0 < a < b$ tales que el sistema realimentado sea *globalmente exponencialmente estable* para todas las no linealidades comprendidas en el sector [a, b].

Problema 5.29. Demuestre, utilizando el criterio de Popov, que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),\\ \dot{\xi}(t) &= u(t),\\ y &= \mathbf{c}\,\mathbf{x}(t) + d\xi(t),\\ u(t) &= -\phi[y(t)],\end{aligned}$$

con

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

es *globalmente asintóticamente estable* para todas las no linealidades $\phi(\cdot)$ invariantes en el tiempo comprendidas en el sector $(0, k)$, donde k es cualquier número *finito*.