Análisis de Sistemas No Lineales

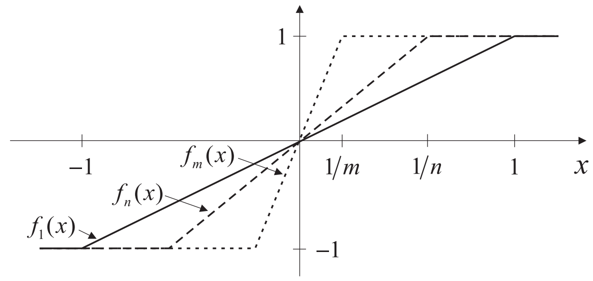
Problemas adicionales al Capítulo 2: Sucesiones convergentes - Espacios completos.

1. Para el espacio $C^0[a,b]$ de las funciones continuas en el intervalo [a, b], con la norma $\|f\|_C = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$,

   (a) Verifique que el espacio vectorial lineal normado $\left(C^0[a,b],\|\cdot\|_C\right)$ es completo.

   (b) La sucesión de funciones continuas $\left\{f_n(\,\cdot\,)\right\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & \text{si} \quad a\le x\le -1/n \\ nx, & \text{si } -1/n\le x\le 1/n \\ 1, & \text{si } -1/n\le x\le b\end{cases} \qquad (1)$$



   con n = 1, 2, ..., $a\le -1$, $b\ge 1$, ¿es convergente en $\left(C^0[a,b],\|\cdot\|_C\right)$?

   (c) ¿Se contradicen los incisos (a) y (b)? Justifique. (Ayuda: ¿es $\left\{f_n(\,\cdot\,)\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy?)

2. Considere el espacio $\mathcal{L}^2_{[a,b]}=\left(C^2[a,b],\|\cdot\|_2\right)$ de las funciones continuas en el intervalo [a, b] con la norma $\|f\|_2=\left(\int_a^b[f(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

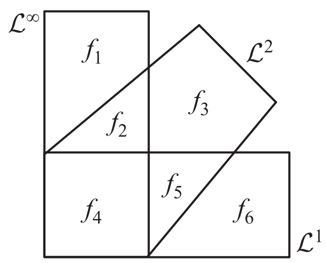
   (a) La sucesión (1) ¿es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_2$? ¿es convergente en $\mathcal{L}^2_{[a,b]}$?

   (b) Verifique que el espacio $\mathcal{L}^2_{[a,b]}$ no es completo.

3. El espacio de las funciones $f:\Omega\to\mathbb{R}$, localmente integrables, con la norma $\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$, con $p\in[1,\infty)$ y $\Omega=[a,b]$ (en este caso) se conoce como espacio $\mathcal{L}^p_\Omega$. Para el caso en que $p=\infty$, la norma $\mathcal{L}^\infty_\Omega$ se define como $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in\Omega}\text{es}|f(t)|=\inf\left\{a:|f(t)|\le a,\text{para casi todo } t\in\Omega\right\}$

   (a) Muestre que $\mathcal{L}^1_{[a,b]}\supset\mathcal{L}^2_{[a,b]}\supset\mathcal{L}^\infty_{[a,b]}$.

   (b) Para $\Omega=[0,\infty)$ y las funciones que se listan a continuación, muestre que se cumplen las relaciones de inclusión ilustradas en el diagrama de Venn.



$$f_1(t)=1; \qquad f_2(t)=\frac{1}{1+t}; \qquad f_3(t)=\frac{1}{1+t}\,\frac{1+t^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{4}}};$$

$$f_4(t)=e^{-t}; \qquad f_5(t)=\frac{1}{1+t^2}\,\frac{1+t^{\frac{1}{4}}}{t^{\frac{1}{4}}}; \qquad f_6(t)=\frac{1}{1+t^2}\,\frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}};$$

   Observe que en este caso se verifica $f\in\mathcal{L}^1\cap\mathcal{L}^\infty\Rightarrow f\in\mathcal{L}^2$. Esta propiedad se verifica para cualquier intervalo Ω infinito; para la demostración consulte C. Desoer, M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input/Output Properties*, Academic Press, 1975, p. 17.