Comunicaciones Digitales

Trabajo Práctico 1

Señales y sistemas pasabanda.

E.1 Una señal pasabajos x(t) con un ancho de banda W es muestreada a la velocidad de Nyquist y como resultado de esto se genera la siguiente señal $x_1(t) = \sum (-1)^n x(nT_s)\delta(t - nT_s)$:

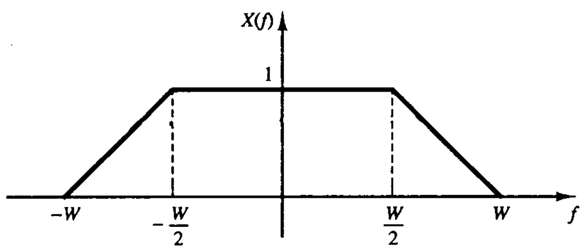
1)Encontrar la transformada de Fourier de $x_1(t)$.
2)Se puede reconstruir x(t) de $x_1(t)$ usando un LTI ? Por que?
3)Se puede reconstruir x(t) de $x_1(t)$ utilizando un sistema lineal variante en el tiempo ? Como?

E.2 Una señal pasabajos x(t) de ancho de banda W es muestreada a intervalos de tiempo T_s y los valores obtenidos se indican como $x(nT_s)$. Una nueva señal $x_1(t)$ es generada mediante una interpolación lineal de los valores muestreados, es decir:

$$x_1(t) = x(nT_s) + \frac{t - nT_s}{T_s}(x((n+1)T_s) - x(nT_s)) \qquad \text{para } nT_s \le t \le (n+1)\,T_s$$

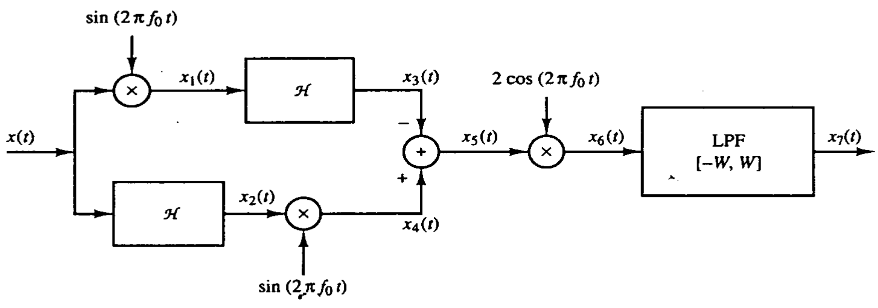
1)Encontrar el espectro de potencia de $x_1(t)$.
2)Bajo que condiciones puede la señal original se reconstruida de la señal muestreada y cual es el filtro de reconstrucción requerido?

E.3 Una señal pasabajos x(t) tiene un transformada de Fourier como lo indica la siguiente figura:



(a)

Esta señal es aplicada al siguiente sistema:



(b)

Los bloques marcados por $\mathcal{H}$ representan transformadores de Hilbert y se asume que W<< f_0.
Determinar las señales $x_i(t)$ para $1 \le i \le 7$ y graficar $X_i(t)$ para las mismas condiciones.

E.4 demostrar que la transformada de Hilbert de $e^{j2\pi f_0 t}$ es igual a $-j.\mathrm{sgn}(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$.

E.5. Una señal pasabanda $x(t)=\mathrm{sinc}.t.\cos(2\pi f_0 t)$ es pasada a través de un filtro pasabanda con respuesta impulsiva $h(t)=\mathrm{sinc}^2(t).\sin(2\pi f_0 t)$. Usando los modelos equivalentes pasabajos para la señal y el filtro encontrar el equivalente pasabajos para la salida y desde esta señal encontrar la salida y(t).

E.6 Dadas las siguientes señales pasabandas , $m(t)= \mathrm{sinc}^2(t)$ y $x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t)-\hat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t)$.
1)Encontrar la preenvolvente z(t) y la señal pasabajo equivalente de a x(t).
2)Determinar y graficar la transformada de Fourier de x(t). Cual es el ancho de banda de x(t)?
3)Repetir el inciso anterior para $x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t)-\hat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t)$.

Simulaciones Matlab

S.1. Determinar y graficar el espectro de magnitud de una señal par x(t) la cual para valores positivos de t esta dada por:

$$x(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \le t \le 1 \\ 2 & 1 \le t \le 2 \\ -t+4 & 2 \le t \le 4 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Determinar los resultados en forma analítica y comparar los resultados

S.2 La señal descrita en el problema anterior se pasa a través de un sistema LTI con una respuesta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 2 & 2 \le t \le 3 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

Determinar el espectro de magnitud y fase de la señal de salida.

S.3 Dada la siguiente señal :

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi \cdot 47\, t) + \cos(2\pi \cdot 219\, t) & \text{para } 0 \le t \le 10 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

Asumir que la señal esta muestreada a 1000 muestras por segundo . Usando la función butter.m que provee Matlab para diseñar un filtro Butterworth diseñar uno de orden 4 con frecuencia de corte 100Hz y pase la señal x(t) a través del mismo. Graficar el espectro de potencia de salida . Realizar los mismos pasos que el inciso anterior pero con un filtro de orden 8.

S.4 Realizar los mismo que en el ejercicio anterior pero con un filtro pasa altos y de la misma frecuencia de corte

Procesos Estocásticos y Ruido

E1. Dado Z=X+Y donde X e Y son variables aleatorias independientes demostrar que: $\Phi_{Z(s)}=\Phi_{X(s)}\Phi_{Y(s)}$. . Φ es la función característica de X y es definida como la transformada de Laplace de $f_x(x)$ evaluada a x=-s.

E2. Demostrar que para la siguiente función de densidad de probabilidad Raleigh

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para otro} \end{cases}$$

Como dato se tiene $E[X]=\sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ y $VAR[X]=\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)\sigma^2$

E.3 Dadas las variables aleatorias X e Y con sus respectivas p.d.f.

$$f_x(x)= \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para otro } x \end{cases}$$

$$f_Y(y)= \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para otro } x \end{cases}$$

donde α y β son constantes positivas , encontrar la p.d.f. de X + Y y tratar el caso especial de $\alpha=\beta$ por separado.

E.4 Dos variables aleatorias X e Y están distribuidas de la siguiente manera:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} K e^{-x-y} & \text{para } x\geq 0 \text{ , } y\geq 0 \\ 0 & \text{para otro } x \text{ e } y \end{cases}$$

Encontrar:

1) El valor de la constante K
2) Las funciones de densidad marginal de X e Y
3) Si X e Y son independientes
4) $f_{X/Y}(x/y)$
5) E[X/Y=y]
6) COV[X,Y]

E.5 Dado un vector aleatorio $X=(X_1,X_2,X_3, ...X_n)$ con distribución conjunta Gaussiana , media **m** y matriz covarianza **C .** Definir un nuevo vector aleatorio $\mathbf{Y=AX^t + b}$,donde **Y** es un vector aleatorio n-dimensional y **A** y **b** matrices constantes. Usando el hecho de que funciones lineales de variables aleatorias conjuntamente Gaussianas son conjuntamente Gaussianas encontrar la media y covarianza de **Y.**

E.6 Dos variables aleatorias X e Y son conjuntamente Gaussianas con:

media **m=[1 2]**

covarianza $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$

1)Encontrar los coeficientes de correlación entre X e Y
2)Si Z=2X +Y y W=X-2Y encontrar la COV(X,Y)
3)Encontrar la función densidad de probabilidad (p.d.f.) de Z

E.7 Dos variables aleatorias X e Y están distribuidas acorde a:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{K}{\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \text{si } x.y \geq 0 \\ 0 & \text{si } x.y < 0 \end{cases}$$

Encontrar:

1)K
2)Demostrar que X e Y son variables aleatorias Gaussianas
3)Demostrar que X e Y no son conjuntamente Gaussianas
4)¿Son X e Y independientes ?
5)¿Están X e Y decorrelacionadas ?
6) $f_{x/y}(x/y)$ y determinar si es Gaussiana

E.8 Cual de las siguientes funciones puede ser una función autocorrelación de un proceso aleatorio y porque ?

1)$f(\tau) = \sin(2\pi.f_0.\tau)$
2)$f(\tau) = \tau^2$
3)$f(\tau)=\begin{cases} 1-|\tau| & |\tau| \leq 1 \\ 1+|\tau| & |\tau| > 1 \end{cases}$
4)$f(\tau)$ como la siguiente figura :

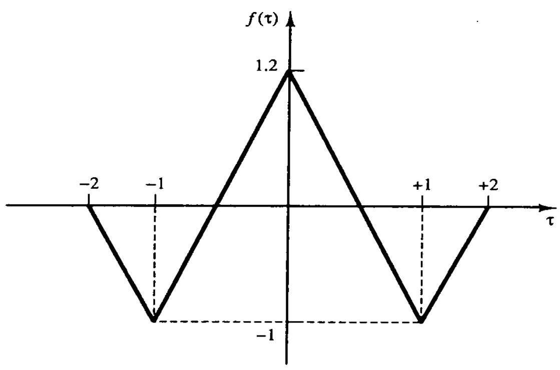


FIGURE P-3.40

E.9. Un proceso aleatorio Z(t) toma valores 0,1. La transición de 0 a 1 y de 1 a 0 ocurre aleatoriamente y la probabilidad de tener n transiciones en un intervalo de tiempo τ , (τ >0) esta dada por la siguiente ecuación $p_N(n) = \frac{1}{1+\alpha\tau}\left(\frac{\alpha\tau}{1+\alpha\tau}\right)^n$, para n=0,1,2,.....

donde $\alpha > 0$ es una constante. Se asume que en el tiempo t=0 , Z(0) es equiprobable la ocurrencia de 0 o 1.

1)Encontrar $m_Z(t)$

2)Encontrar $R_Z(t + \tau , t)$. Determinar si es estacionario. Determinar si es cicloestacionario.

3)Determinar la densidad de potencia espectral

E.10 Si un proceso aleatorio estacionario X(t) con función autocorrelación $R_X(\tau)$ es aplicado a un sistema LTI con repuesta impulsiva h(t), la salida Y(t) es también un proceso aleatorio estacionario con función autocorrelación

$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \star h(\tau) \star h(-\tau)$

1)Si el proceso X(t) es un proceso aleatorio cicloestacionario y se aplica a un sistema LTI con respuesta impulsiva h(t) demostrar que el proceso de salida también es cicloestacionario.

2)Verificar que la relación $S_Y(f) = S_X(f)\, |H(f)|^2$ se cumple para procesos estacionarios así como también para cicloestacionarios

E.11 Encontrar la densidad de potencia espectral para los siguientes procesos:

1) $X(t)=A.\cos(2.\pi.f_0.t +\theta)$, donde A es una constante y θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[0 , \frac{\pi}{4}]$.

2)X(t) = X + Y donde X e Y son independientes, X es uniforme en [-1, 1] e Y es uniforme en [0,1].

E.12 Dado Y(t) = X(t) + N(t) donde X(t) y N(t) son respectivamente los procesos señal y ruido. Se asume que X(t) y N(t) son conjuntamente estacionarios con funciones auto correlación $R_X(\tau)$ y $R_N(\tau)$ y función correlación cruzada $R_{XN}(\tau)$. Se desea separar la señal del ruido pasando Y(t) a través de un sistema LTI con respuesta impulsiva h(t) y función transferencia H(f) . El proceso de salida se indica como X'(t) y se desea que su valor sea tan cercano a X(t) como sea posible

1) Encontrar la correlación cruzada entre X'(t) y X(t) en terminaos de $h(\tau)$, $R_X(\tau)$, $R_N(\tau)$ y $R_{XN}(\tau)$.

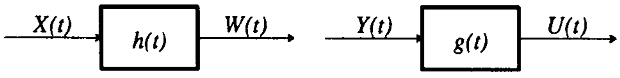
2)Demostrar que el sistema LTI que minimiza $E[X(t)- X'(t)]^2$ tiene la siguiente función transferencia:

$$H(f) = \frac{S_X(f) + S_{XN}(f)}{S_X(f) + S_N(f) + 2\,\mathrm{Re}[S_{XN}(f)]}$$

3) Ahora asuma que X(t) y N(t) son independientes y N(t) es un proceso gaussiano con media cero y densidad de potencia espectral N0/2 .Encontrar la función transferencia H(f) optima para bajo esas condiciones. Cual es el valor de $E[X(t)- X'(t)]^2$ en este caso.

4)En el caso especial de $S_N(f) =1$, $S_X(f) = \frac{1}{1+f^2}$ y $S_{XN}(f)= 0$ encontrar la función transferencia H(f) optima.

E.13 Demostrar que el espectro de potencia cruzada (cross- power spectrum) de la siguiente figura esta dado por $S_{WU}(j\omega) = H(j\omega).G^*(j\omega).S_{XY}(j\omega)$



E.14 Para una cadena homogénea de Markov la relación de la evolución de la probabilidad de los estados con respecto al tiempo esta determinada por $p_{k+1}(j)=\sum_{i\in\Omega_\psi} p(j/i)p_k(i)$ ***,(1)*** , donde $p_k(i)$ es la probabilidad de estar en el estado i en el tiempo k.
Hacer la transformada Z en ambos lados de ***(1)*** y verificar que $P_j(z)=p_0(j)+\sum_{i\in\Omega_\psi} p(j/i)z^{-1}P_i(z)$ ***(2)*** donde $P_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(j)z^{-k}$, si hay N estados la ecuación ***(2)*** da N ecuaciones con N incógnitas $P_j(z)$.

E.15 Demostrar que la media del primer tiempo de transito (first passage time) en una cadena de Markov es $f_N=-\frac{\partial}{\partial z}Q_N(z)\ \Big|_{z=1}$

Simulaciones Matlab

S.1 Generar una secuencia de 1000 muestras de un proceso Gauss-Markov descrito por la siguiente relación recursiva $X_n=\rho X_{n-1}+W_n$ para n =1,2,.....,1000
donde $X_0=0$, $\rho=0.9$ y $\{W_n\}$ es una secuencia con media cero y varianza unidad.

S.2 Generar una secuencia discreta de N=1000 muestras aleatorias uniformemente distribuidas con media cero y varianza unidad en el intervalo -1/2 y 1/2 y computar la auto-correlación de la secuencia $\{X_n\}$ definida como:

$$R_x(m)=\frac{1}{N-m}\sum_{n=1}^{N-m} X_n X_{n+m}, \qquad \text{para m=0,1,2,....M}$$

y

$$R_x(m)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=|m|}^{N} X_n X_{n+m}, \qquad \text{para m=-1,-2,....-M}$$

También determine el espectro de potencia de la secuencia $\{X_n\}$ computando la transformada discreta de Fourier (DFT) de $R_X(m)$ la cual es eficientemente computada utilizando el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) definido como:

$$S_X(f)=\sum_{m=-M}^{M} R_X(m)e^{-j2\pi fm/(2M+1)}$$

S.3 Generar una secuencia $\{X_n\}$ de N=1000 valores aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo [-1/2 , 1/2]. Pasar esta secuencia a través de un filtro con respuesta impulsiva:

$$h(n)=\begin{cases} (0.95)^n & \text{para } n \ge 0 \\ 0 & \text{para } n \le 0 \end{cases}$$

La ecuación recursiva que describe la salida de este filtro como una función de la entrada esta dada por:
$y_n=0.95.y_{n-1}+x_n$ para $n \ge 0$ $y_{-1}=0$

Computar las funciones auto-correlación $x_n(m)$ y $R_y(m)$ de las secuencias $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ y sus correspondientes espectros de potencia $S_x(f)$ y $S_y(f)$ usando las siguientes ecuaciones :

$$R_x(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=1}^{N-m} X_n X_{n+m}, \qquad S_X(f) = \sum_{m=-M}^{M} R_X(m) e^{-j2\pi fm/(2M+1)}$$

S.4 Generar dos secuencias $\{\varpi_{CN}\}$ y $\{\varpi_{SN}\}$ de N=1000 valores aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo [-1/2, 1/2]. Cada una de las secuencias es pasada a través de un filtro lineal con respuesta impulsiva

$$h(n) = \begin{cases} (1/2)^n & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

la relación entrada salida de este filtro esta determinada por la siguiente ecuación recursiva:

$x_n = 1/2.x_{n-1} + \varpi_N$ para $n \geq 1$ y $x_0 = 0$

Obtener dos secuencias $\{x_{CN}\}$ y $\{x_{SN}\}$ pasando las secuencias ϖ a través del filtro. Con la secuencia de salida $\{x_{CN}\}$ modular una portadora $\cos(\pi/2)n$ y con la secuencia $\{x_{SN}\}$ modular una portadora en cuadratura $\sin(\pi/2)n$. Generar una señal pasabanda combinando las componentes obtenidas.

Computar y graficar la auto-correlación de las secuencias $\{x_{SN}\}$ y $\{x_{CN}\}$ para $|m| \leq 10$. Computar la auto-correlación de la señal pasabanda para $|m| \leq 10$. Utilizar DFt o FFT para computar el espectro de potencia de $S_C(f)$, $S_S(f)$ y $S_X(f)$. Graficar dichos espectros y comentar los resultados .

Trabajo Practico 1 Fecha de entrega