Comunicaciones Digitales

Trabajo Práctico 2

Codificación de Fuente

E.1 Una fuente tiene un alfabeto {a1,a2, a3, a4, a5, a6} con sus correspondientes probabilidades {0.1,0.2,0.3,0.05,0.15,0.2}. Encontrar la entropía de esta fuente. Comparar esta entropía con una fuente uniformemente distribuida con el mismo alfabeto.

E.2 La variable aleatoria X es la salida de una fuente que es uniformemente distribuida con tamaño N. Encontrar la entropía.

E.3 Una fuente de información puede ser modelada como un proceso de ancho de banda iguala 6000Hz. Este proceso es muestreado a una velocidad mayor que la de Nyquist para proveer una banda de guarda de 2000Hz. Se observa que las muestras resultantes de este proceso toman los siguientes valores $\mathcal{A}$ ={-4, -3, -1, 2, 4,7} con sus respectivas probabilidades 0.2, 0.1, 0.15, 0.05, 0.3, 0.2. Cual es la entropía de esta fuente discreta en bits/salida (muestra)? Cual es la entropía en bits/seg.?

E.4 Una fuente sin memoria tiene el siguiente alfabeto $\mathcal{A}$ = {-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5} con su respectiva probabilidad {0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.05, 0.25, 0.3}.

1)Encontrar la entropía de la fuente

2)Asumiendo que la fuente es cuantizada acorde a la siguiente regla de cuantizacion

$$\begin{cases} q(-5)=g(-3)=4 \\ q(-1)=q(0)=q(1)=0 \\ q(3)=q(5)=-4 \end{cases}$$

Encontrar la entropía de la fuente cuantizada.

E.5 Una fuente binaria simétrica genera n salidas.

1)Cual es la probabilidad de que esta secuencia consista solo de ceros?

2)Cual es la probabilidad de que esta secuencia consista solo de uno?

3)Cual es la probabilidad de que en esta secuencia los primero k símbolos sean unos y los restantes n-k   símbolos sean ceros?

4)Cual es la probabilidad de que la secuencia tenga k unos y n-k ceros?

5)Como serían las respuestas anteriores si en lugar de una fuente binaria simétrica se utilizara una fuente discreta sin memoria con p(Xi=1)=p?

E.6 Una fuente ternaria sin memoria con alfabeto de salida a1, a2 y a3 con su respectiva probabilidad 0.2, 0.3 y 0.5 produce una secuencia de largo 1000.

1)Aproximadamente cual es el número de secuencias la salida de la fuente?

2)Cual es la relación entre las frecuencias típicas y las no típicas?

3)Cual es la probabilidad de una secuencia típica?

4)Cual es el numero de bits requeridos para representar solamente las secuencias típicas de salida?

5)Cual es la secuencia mas probable y cual es su probabilidad?

6)Es la secuencia mas probable una secuencia típica?

E.7 Una fuente tiene el siguiente alfabeto $\mathcal{A}$={a1, a2, a3, a4} con sus respectivas probabilidades {0.1, 0.2, 0.3, 0.4}

1)Encontrar la entropía de la fuente.

2)Cual es la mínima longitud promedio de código para representar esta fuente para una reconstrucción libre de errores.

3)Diseñar un código Huffman para la fuente y comparar la longitud promedio del código Huffman con la entropía de la fuente.

4)Diseñar un código Huffman para la segunda extensión de la fuente (tomar dos letras al mismo tiempo). Cual es la longitud promedio de código? Cual es el promedio de letras binarias por cada letra de la fuente de salida?

5)Cual de los esquemas de codificación es mas eficiente: el código Huffman para la fuente original o el código Huffman para la segunda extensión de la fuente.

E.8 Encontrar el código de fuente Lempel-Ziv para la siguiente secuencia de fuente binaria:
0001001000000110000100000001000000101000100000011010000000001100
Recuperar la secuencia original de la secuencia codificada con el código Lempel-Ziv (Ayuda: Se requieren dos pasadas de la secuencia binaria para decidir el tamaño del diccionario).

E.9 Encontrar la entropía diferencial de la variable aleatoria continua X en los siguientes casos:

1) X es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda > 0$

$$f_x(x)=\begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{(-\frac{x}{\lambda})} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para todo otro } x \end{cases}$$

2) X es una variable aleatoria Laplaciana con parámetro $\lambda > 0$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\lambda}e^{\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right)}$$

3)X es una variable aleatoria triangular con parámetro $\lambda > 0$

$$f_x(x)=\begin{cases} \frac{x+\lambda}{\lambda^2} & \text{para } -\lambda \le x \le 0 \\ \frac{-x+\lambda}{\lambda^2} & \text{para } 0 < x \le \lambda \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

E.10 Se puede demostrar que si X es una variable aleatoria continua de media cero y varianza σ^2, su función distorsión (rate distorsion function) sujeta a la medición del error cuadrático de distorsión satisface los limites inferior y superior dados por las siguientes desigualdades

$h(X)-\frac{1}{2}\log(2\pi eD) \le R(D) \le \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}$ donde h(X) describe la entropía diferencial de la variable aleatoria X.

1)Demostrar que para una variable aleatoria Gaussiana los limites superiores e inferiores coinciden

2)Graficar el limite inferior y superior para una fuente Laplaciana con σ=1

3) Graficar el limite inferior y superior para una fuente triangular con σ=1

(Ayuda: Utilizar los resultados del ejercicio anterior)

E.11 Dado X(t) , proceso Gaussiano estacionario en sentido amplio con P_x =10:

1)Usado la Tabla adjunta calcular un cuantizador optimo uniforme de 16 niveles para esta fuente.

2)Cual el la distorsión resultante si dicho cuantizador es utilizado?

3)Cual es el mínimo numero de bits por símbolo de fuente requerido para representar la fuente cuantizada?

4)Comparar este resultado con el resultado obtenido con el limite de distorsión (rate-distorsion bound) que logra la misma cantidad de distorsión.

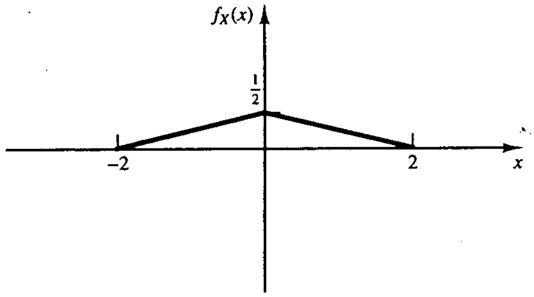
5)Cual es la mejora en SQNR (en dB) que resultaría si se duplica la cantidad de niveles de cuantizacion de 8 a 16 bits.

TABLE 4-2 OPTIMAL UNIFORM QUANTIZER FOR A GAUSSIAN SOURCE

No. output levels N	Output-level spacing Δ	Mean-squared error D	Informational entropy $H(\hat{x})$
1	—	1.000	0.0
2	1.596	0.3634	1.000
3	1.224	0.1902	1.536
4	0.9957	0.1188	1.904
5	0.8430	0.08218	2.183
6	0.7334	0.06065	2.409
7	0.6508	0.04686	2.598
8	0.5860	0.03744	2.761
9	0.5338	0.03069	2.904
10	0.4908	0.02568	3.032
11	0.4546	0.02185	3.148
12	0.4238	0.01885	3.253
13	0.3972	0.01645	3.350
14	0.3739	0.01450	3.440
15	0.3534	0.01289	3.524
16	0.3352	0.01154	3.602
17	0.3189	0.01040	3.676
18	0.3042	0.009430	3.746
19	0.2909	0.008594	3.811
20	0.2788	0.007869	3.874
21	0.2678	0.007235	3.933
22	0.2576	0.006678	3.990
23	0.2482	0.006185	4.045
24	0.2396	0.005747	4.097
25	0.2315	0.005355	4.146
26	0.2240	0.005004	4.194
27	0.2171	0.004687	4.241
28	0.2105	0.004401	4.285
29	0.2044	0.004141	4.328
30	0.1987	0.003905	4.370
31	0.1932	0.003688	4.410
32	0.1881	0.003490	4.449
33	0.1833	0.003308	4.487
34	0.1787	0.003141	4.524
35	0.1744	0.002986	4.560
36	0.1703	0.002843	4.594

From Max (1960) © IEEE

E.12 Una señal puede ser modelada como un proceso estacionario pasabajos X(t) cuya p.d.f. en cualquier tiempo t_0 esta dada por la siguiente grafica.



El ancho de banda de este proceso es 5kHz y se desea transmitirlo con un sistema PCM.
1)Si se muestrea a la velocidad de Nyquist y se utiliza un cuantizador uniforme de 32 niveles, cual es la SQNR? Cual es la velocidad de bit resultante?
2)Si el ancho de banda de canal es de 40kHz cual es el máximo SQNR posible?
3)Si en lugar de muestrear a la velocidad de Nyquist se necesita una banda de guarda de 2kHz y el canal nuevamente es de 40kHz, cual es ahora el máximo SQNR posible?

E.13 Un proceso aleatorio X(t) esta definido por $X(t)=Y\ .\cos(2\pi f_0 + \varphi)$ donde Y y φ son dos variables aleatorias independientes, Y es uniforme en [-3, 3] y φ es uniforme en $[0\ ,\ 2\pi]$.
1)Encontrar la función autocorrelación de X(t) y su densidad de potencia espectral.
2)Si X(t) se transmite utilizando un sistema PCM de manera que se mantenga un mínimo SQNR de 40 dB, cual es el numero de bits/muestra y ancho de banda mínimos requeridos.
3)Si se incrementa el SQNR en 24 dB , cuantos bits /muestra se deben agregar y cual es el nuevo ancho de banda mínimo?

Simulación Matlab

S.1 Una fuente de información continua tiene media cero y varianza unidad con distribución Gaussiana. Esta fuente es cuantizada utilizando un cuantizador uniforme simétrico donde el largo de las regiones de cuantizacion es la unidad . El número de niveles de cuantizacion es N. Para N=2,3,4,5,6,7,8 determinar la entropía de la fuente de salida cuantizada y graficarla en función de N. En el mismo grafico agregar $\log_2 N$ versus N y explicar porque las dos curvas difieren.

S.2 Una fuente Gaussiana de media cero y varianza unidad es cuantizada utilizando un cuantizador uniforme. El cuantizador uniformemente cuantiza el intervalo [-10, 10]. Asumiendo que los niveles de cuantización están localizados en los puntos medios de las regiones de cuatización , determinar y graficar la distorsión media cuadrática para N=3,4,5,6,7,8,9,10 como función de N, donde N es el numero de niveles de cuantizacion. Graficar tan bien la distorsión media cuadrática para los niveles de cuantizacion tomados como centroide de las regiones de cuantizacion. Para que valores de N las dos graficas son similares.

S.3 Para una fuente Gaussiana de varianza unidad y media cero diseñar cuantizadores óptimos no uniformes con niveles N=2,3,4,5,6,7,8. Para cada caso determinar H(X^), la entropía de la fuente cuantizada y R , el largo promedio de palabra del código Huffman diseñado para dicha fuente. Graficar H(X^), R y $\log_2 N$ como función de N en la misma figura.

S.4 Una señal x(t) es periódica con periodo 2, en el intervalo [0 , 2] esta definida como:

$$x(t)=\begin{cases} t & \text{para } 0\leq t < 0 \\ -t + 2 & \text{para } 1\leq t < 2 \end{cases}$$

1)Diseñar un cunatizador uniforme PCM de 8 niveles para esta señal y graficar la salida cuantizada
2)Graficar el error de cuantizacion para este sistema
3)Calculando la potencia de error de la señal calcular la SQNR en decibeles
4)Repetir los pasos anteriores para un cuantizador de 16 niveles.

S.5 Generar una secuencia Gaussiana de 1000 muestras con media 0 y varianza 1 . Diseñar cuantizadores PCM de 4, 8, 16 y 32 niveles y graficar el SQNR resultante en función del numero de bits utilizados para cada esquema.

Trabajo Práctico 2   Fecha de entrega