1 Introducción

1.1 El problema de filtrado

Tareas de procesamiento de la información:

1. **Filt rado**, extracción de información sobre una cantidad de inter&s disponible en un instante n utilizando datos medidos hasta e inclusive ese instante.

2. **S uavizad o**, difiere del filtrado en que la información sobre la cantidad de interés no necesita estar disponible en el instante n y datos medidos posteriormente al instante n pueden utilizarse. Esto significa que en suavizado existe un retardo en producir el result ado de int erés.

3. **Predicción**, permite el pronóstico de la información. El objetivo es obtener información sobre como la cantidad de interés será en un futuro instante de tiempo $n + \tau$, para algún $\tau > 0$, usando los datos medidos hasta e inclusive el instante n.

- En la solución estadistica al problema de filtrado lineal (la salida función lineal de las observaciones) se supone conocidos ciertos par&metros estadisticos (como media y correlación). El objetivo minimizar algún critério de la señal de error obtenida.
- Para entradas estacionarias, filt ro de W iener, óptimo en sentido medio cuadratico.
- Para ambientes no estacionarios el filtro óptimo debe asumir una formavariante en el tiempo: filtro de Kalman.

1.2 Filtros adaptivos

- Cuando los par&metros estadisticos adecuados para el filtro de Wiener no están disponibles existen diferentes tipo de soluciones.
- Solución posible, no muy eficiente, estimar esos par&metros en línea y utilizar una ecuación no recursiva para obtener una solución aproximada al filtro de Wiener.
- Solución más adecuada para operación en tiempo real es la utilización de un **filtro adaptivo**. Los coeficientes se ajustan siguiendo un crit ério. Ajuste coeficientes mediante **algorit m o rec u r sivo** cuyas propiedades conduzcan a una buena aproximación de la solución de Wiener.

Algunos factores importantes en análisis de filtros adaptivos

- **Velocidad de convergencia.** Número de iteraciones requerida por el algoritmo, en respuesta a entradas estacionarias, para convergir en forma suficientemente próxima a la solución de Wiener en un sent ido medio cuadrático.
- **Desajuste.** Medida de la cantidad por la cual el valor final del error medio cuadrático (utilizado usualmente como critério a minimizar), se desvia del mínimo del filtro de Wiener.
- **Seguimiento.** Operacón en un ambiente no estacionario, el algoritmo requiere seguir (tracking) las variaciones estadisticas. El desempeño está influenciado por: la velocidad de convergencia y la fluctuación de estado estacionario debido a ruido del algoritmo.

- **Robust ez.** Para que un filtro adaptivo sea robusto, perturbaciones de pequena energia deben resultar en errores de estimación pequenos.

- **Requerimientos computacionales.** Numerodeoperaciones requeridas para completar una iteración del algoritmo, tamaño de memoria requerido para almacenar los datos y el programa y la inversion requerida para desarrollar el algoritmo.

- **Estructura.** Flujo de información en el algoritmo y forma en que será implementado el hardware.

- **Propiedades numéricas.** Los errores de cuantización son debido a la conversion A/D de los datos de entrada y a la representación digital interna. (la fuente más considerable). Dos aspectos: estabilidad numérica y precision numerica.

1.3 Estructuras de filtros lineales

1. Filtro transversal

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} w_k x(n-k) \qquad (1)$$

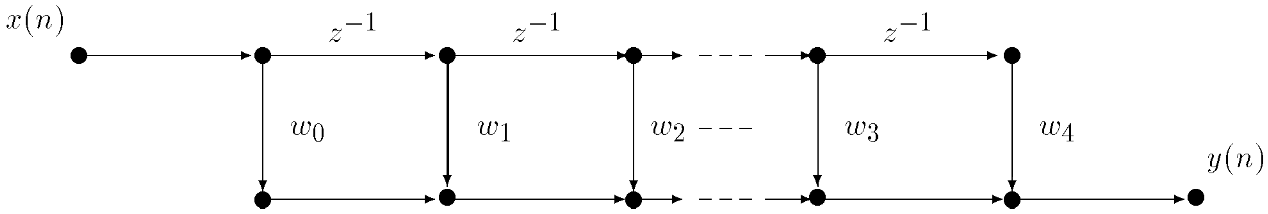

Figura 1: Filtro transversal.

2. Predictor lattice.

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m b_{m-1}(n-1)$$
$$b_m(n) = b_{m-1}(n-1) + K_m f_{m-1}(n)$$

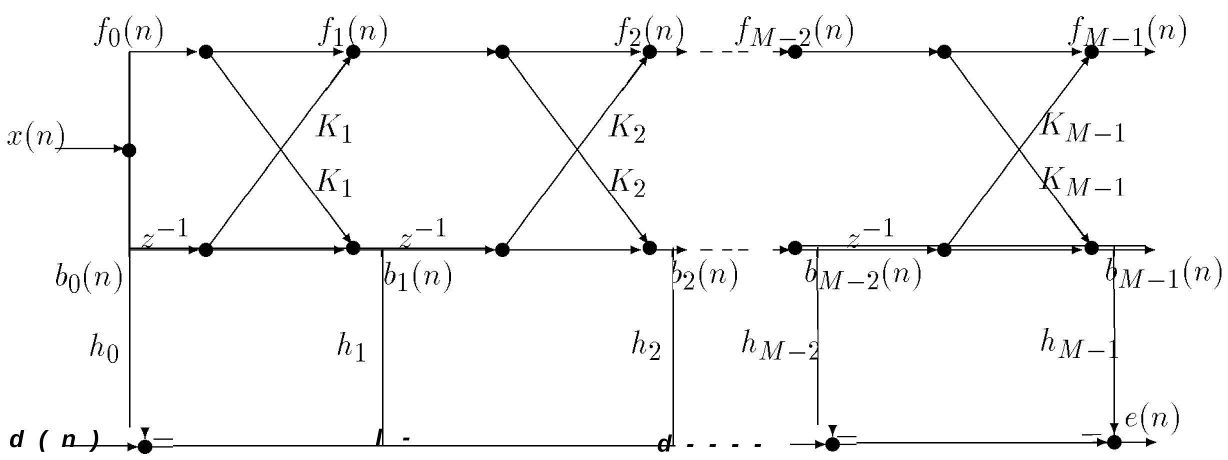

Figura 2: Filtro lattice

1.4 Algoritmos de filtrado adaptivo

- No existe una solución única para el problema de filtrado adaptivo, sino más bien una variedad de herramientas representadas por un conj unto de algoritmos, cada uno de los cuales ofrece caracteristicas adecuadas a cierta aplicación.

- Es posible identificar en forma general dos formas distintas para derivar algoritmos recursivos para la operación de filtros adapt ivos lineales

  – Aproximación de gradiente estocastico.

  – Estimación de Cuadrados Minimos.

1.4.1 Aproximación de gradiente estocástico

El algoritmo tipico es conocido como least-mean-square (LMS),

$$\begin{pmatrix}\text{valor próximo}\\ \text{del vector de}\\ \text{coeficientes}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{valor actual}\\ \text{del vector de}\\ \text{coeficientes}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parámetro}\\ \text{de}\\ \text{convergencia}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{vector}\\ \text{de}\\ \text{entradas}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{señal}\\ \text{de}\\ \text{error}\end{pmatrix}$$

1.4.2 Estimación de Cuadrados Minimos

El método de cuadrados minimos puede formularse para **est im ación en bloques** ó **estimación** secuencial.

La estimación de cuadrados minimos **recursivo** (RLS) puede interpretarse como un caso especial de filtrado Kalman.

$$\begin{pmatrix}\text{valor próximo}\\ \text{del vector de}\\ \text{coeficientes}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{valor actual}\\ \text{del vector de}\\ \text{coeficientes}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{de}\\ \text{Kalman}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{vector}\\ \text{de}\\ \text{innovación}\end{pmatrix}$$

Clasificación familia RLS de algoritmos de filtrado adaptivo:

1. Algoritmos RLS estandar, resultado básico del álgebra lineal conocido como lema de **inversión** de matrices. Este algoritmo goza de las mismas virtudes y sufre los mismos defectos que el algoritmo Kalman estandar. Las limitaciones incluyen carencia de robustez numérica y complejidad computacional excesiva.

2. Algoritmos RLS factorizados, están basados en la **descomposición** QR de la matriz de datos de entrada. Dos técnicas son la **transformación** de Householder y las **rotaciones** de Givens. Son estables y robustos.

3. Algoritmos RLS **rápidos**, Los anteriores complejidad computacional que aumenta con $O(M^2)$, donde M es el número de coeficientes ajustables en el algoritmo. En el LMS es $O(M)$. Cuando M es grande, la complejidad $O(M^2)$ puede ser excesiva para una aplicación determinada, entonces motivación para desarrollar RLS de $O(M)$. Alcanzable usando la estructura Toeplitz de la matriz de datos de entrada y también usando **predicción** lineal de cuadrados minimos hacia **adelante** y hacia **atrás** (forward y backward). Dos RLS de O(M):

   - Filtros adaptivos recursivos en **orden**, basados en una estructura tipo lattice para realizar las prediciones forward y backward.
   - Filtros transversales **rápidos**, donde las predicciones forward y backward se realizan con filtros transversales separados.

   No todas las realizaciones de filtros adaptivos recursivos en orden son numericament e est ables.

Caracteristicas de seguimiento

- los algoritmos de tipo gradiente tal como el LMS son **independientes del modelo**, genericamente es posible esperar un buen comport amient 0 en seguimient 0.
- los algoritmos RLS son **dependientes del modelo**, lo que significa que sus comportamientos en seguimiento pueden ser inferiores al de algún miembro de la familia de gradientes estocásticos.

1.5 Filtros adaptivos en forma real y compleja

- En aplicaciones de comunicaciones, radar, sonar y de transporte de información la señal en el receptor tipicamente consiste en una señal de mensaje mo dulada en una señal portadora.

- El ancho de banda de la señal de mensaje usualmente es pequeno comparado con la portadora, lo cual significa que la señal modulada es de **banda** estrecha.

- Para obtener la representación bandabase de una señal de banda estrecha se traslada la señal en frecuencia hasta queel efecto de la portadora sea removido, de forma que la señal de mensaje se mantenga inhalterada. La seal de bandabase así obtenida es en general compleja. En otras palabras, $U(n)$ puede ser escrita como

$$u(n) = u_I(n) + ju_Q(n)$$

donde $u_I(n)$ es la **componente** en fase y $u_Q(n)$ esla **com-** ponente en cuadratura. En forma equivalente es posible expresar $u(n)$ como

$$u(n) = |u(n)|e^{j\phi(n)}$$

donde $|u(n)|$ es la envolvente y $\phi(n)$ es la fase.

- Un algoritmo de filtrado adaptivo desarrolado de esta forma se dice en forma compleja. La caracteristica importante de filtros adaptivos complejos es que mantienen la formulación matematica y estructura de las aplicaciones mencionadas.

1.6 Aplicaciones

- La abilidad de un filtro adaptivo para operar satisfactoriamente en un contexto desconocido y seguir variaciones en el tiempo de la estadistica de la entrada hacen al filtrado adaptivo una herramienta poderosa para varias aplicaciones de procesamiento de señal y control.
- Han sido exitosamente aplicados en campos tan diversos como comunicaciones, radar, sonar, sismologia e ingenieria biomédica.
- A pesar que esas aplicaciones son bien diferentes en naturaleza tienen una base común: el vector de entrada y la respuesta deseada se utilizan para obtener el error de estimación, el cual se usa para controlar los valores de un conj unto de coeficientes ajustables asociados al filtro.
- Los coeficientes ajustables pueden tener la forma de par&metros de reflexion, par&metros de rotación, etc., dependiendo de la estructura del filtro adaptivo utilizado.
- La diferencia esencial entre las aplicaciones reside en la forma en que se obtiene la respuesta deseada.

- Es posible distinguir cuatro clases de aplicaciones de filtrado adaptivo, donde: u: es la entrada aplicada al filtro, y: es la salida del filtro, d es la respuesta deseada y $e = d - y$ es el error de estimación.

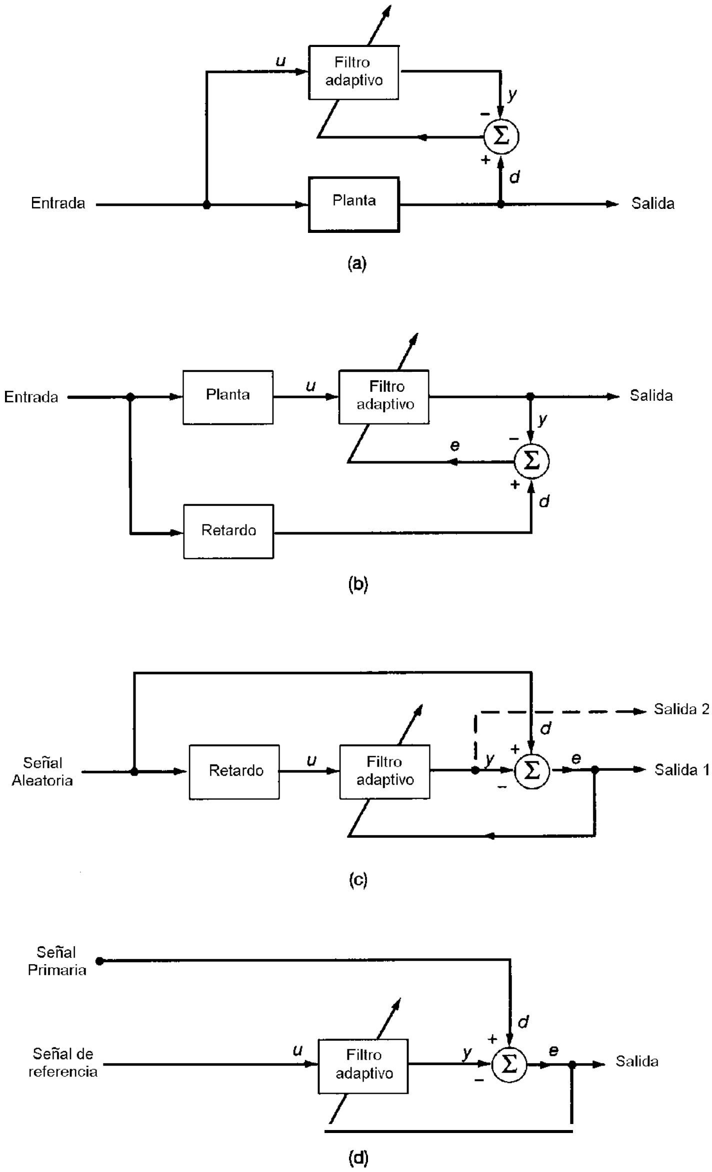

Figura 3: Clases de aplicaciones de filtrado adaptivo: a) identificación, b) modelado inverso, c) predicc'ón, d) cancelamiento de interferencias.