2 Procesos estacionarios, modelos y densidad espectral

- Los procesos estocásticos de interés se definen como **discretos y uniformemente espaciados en el tiempo**.
- Un proceso estocástico no es una única función del tiempo, sino que representa un número infinito de realizaciones diferentes. Una realización particular, normalizando el tiempo con respecto al período de muestreo, de la secuencia $u(n)$ es $u(n-1)$, $\cdots$, $u(n-M)$.
- Un proceso estocástico es **estrictamente estacionario** si sus propiedades estadísticas son **invariantes** al desplazamiento en tiempo.
- Especificamente, para que el proceso $u(n)$ anterior sea estrictamente estacionario, la **función densidad de probabilidad conjunta** de las observaciones realizadas en los instantes n, $n-1$, $\cdots$, $n-M$ debe ser la misma independientemente de los valores que asignemos a n, para un M fijo.

2.1 Caracterización de procesos estocásticos

- En la práctica no siempre es posible determinar (por medio de mediciones) la función densidad de probabilidad conjunta de un conjunto arbitrario de observaciones realizadas sobre un proceso estocástico.
- En su lugar es posible conformarse con una caracterización parcial del proceso especificando sus momentos de primer y segundo orden.
- Para un proceso estocástico $u(n)$, definido para $u(n-1), \cdots$, $u(n-M)$, definimos la **la función valor medio** como

$$\mu(n) = E[u(n)]$$

donde E es la notación para el **operador esperanza estadística**. Definimos también la **función autocorrelación** del proceso como

$$r(n, n-k) = E[u(n)u^*(n-k)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

y la **función autocovarianza** como

$$c(n, n-k) = E[(u(n) - \mu(n))(u(n-k) - \mu(n-k))^*], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

de donde

$$c(n, n-k) = r(n, n-k) - \mu(n)\mu(n-k)$$

- Esta caracterización parcial ofrece dos ventajas importantes

  1. Es adecuada para las mediciones prácticas.
  2. Es adecuada para operaciones lineales sobre procesos estocásticos.

- Para el caso de procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio

$$
\begin{aligned}
\mu(n) &= \mu \quad \text{constante} \\
r(n, n-k) &= r(k) \\
c(n, n-k) &= c(k)
\end{aligned}
$$

además para $k = 0$, $r(0)$ es el **valor medio cuadrático** de $u(n)$, dado por

$$r(0) = E[u^2]$$

y $c(0) = \sigma_u^2$ es la **varianza** de $u(n)$.

2.2 Matriz Correlación

- Para $\boldsymbol{u}(n)$ $(M \times 1)$ representando un proceso estocástico $u(n)$ de $u(n-1)$ a $u(n-M+1)$, la **matriz de correlación $\boldsymbol{R}$** de un proceso estacionario (en sentido amplio) es

$$\boldsymbol{R} = E[\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{u}^H(n)] = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ & & \vdots & \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

2.2.1 Propiedades

1. **La matriz autocorrelación de un proceso estocástico estacionario de simétrica**, o sea: $\boldsymbol{R}^H = \boldsymbol{R}$.

   Esta propiedad se verifica a partir de la definición.

2. **La matriz correlación de un proceso estocástico estacionário es Toeplitz.**

   Esto es una consecuencia directa de estacionaridad en sentido amplio.

3. **La matriz correlación de un proceso estocástico estacionário es siempre no negativa y casi siempre positiva.**

   Esta condición es satisfecha para cualquier proceso estacionario en sentido amplio a menos que existan dependencias lineales entre las variables aleatórias que constituyen los M elementos de $\boldsymbol{u}(n)$ (esta situación existe, en particular, cuando $u(n)$ consiste en la suma de K sinusoides con $K \leq M$).

4. **Cuando los elementos que forman el vector de observación de un proceso estocástico son reordenados hacia atrás, el efecto es equivalente a la transposición de la matriz correlación del proceso**. Si el proceso es estacionario la matriz correlación es idéntica.

   Definamos $\boldsymbol{u}^B(n)$ $(M \times 1)$ reordenando los elementos de $\boldsymbol{u}(n)$ hacia atrás (**backward**), o sea

$$\boldsymbol{u}^{BT}(n) = [u(n-M+1),\ u(n-M+2),\ \cdots,\ u(n)]$$

   La matriz correlación de $\boldsymbol{u}^B(n)$ será por definición

$$E[\boldsymbol{u}^B(n)\boldsymbol{u}^{BT}(n)] = \begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(-M+1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(-M+2) \\ & & \vdots & \\ r(M-1) & r(M-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^T$$

   y si el proceso es estacionario $E[\boldsymbol{u}^B(n)\boldsymbol{u}^{BT}(n)] = \boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}$.

5. **Las matrices de correlación $\boldsymbol{R}_M$ y $\boldsymbol{R}_{M+1}$ de un proceso estacionario, observaciones M y $M+1$, están relacionadas por**

$$\boldsymbol{R}_{M+1} = \begin{bmatrix} r(0) & \boldsymbol{r}^H \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{R}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_M & \boldsymbol{r}^{B*} \\ \boldsymbol{r}^{BT} & r(0) \end{bmatrix}$$

   donde $r(0)$ es el proceso de autocorrelación correspondiente al retardo 0. También,
   $\boldsymbol{r}^H = [r(1), r(2), \cdots, r(M)]$ y $\boldsymbol{r}^{BT} = [r(-M), r(-M+1), \cdots, r(-1)]$.

2.3 Modelos estocásticos

- El término **modelo** se aplica a cualquier suposición o hipótesis que pueda aplicarse para explicar o describir las leyes ocultas que se supone gobiernan la generación de los datos físicos de interés.

- La idea es que un proceso estocástico $u(n)$ puede describirse a través de un filtro lineal cuya entrada es facilmente caracterizable, en particular **ruido blanco gaussiano de media cero y varianza unitaria,** $\nu(n)$ descripto por

$$\begin{aligned} E[\nu(n)] &= 0 \quad \text{para todo } n \\ E[\nu^2(n)] &= \begin{cases} \sigma_\nu^2, k = n \\ 0, \text{para todo otro } n \end{cases} \end{aligned}$$

  donde σ_ν^2 es la varianza del ruido.

- En general, la descripción en el domínio tiempo de la relación entrada-salida del modelo estocástico puede describirse como

$$\left(\begin{array}{c} \text{valor presente} \\ \text{de salida del modelo} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{combinación lineal} \\ \text{de valores pasados} \\ \text{de salida del modelo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{combinación lineal} \\ \text{de valores presentes y pasados} \\ \text{de salida del modelo} \end{array} \right)$$

- Un proceso estocástico definido de esta forma se denomina **proceso lineal**. Existen otras descripciones diferentes a la de **entrada - salida** para caracterizar tal tipo de sistemas.

- En particular discutiremos tres tipos de modelos estocásticos: a) autoregresivos (AR), b) promedios móviles (MA) y c) ARMA, donde se utilizan valores pasados de la entrada y salida del modelo.

2.3.1 Modelos autoregresivos (AR)

- Un proceso $u(n)$, definido para $u(n-1), \cdots, u(n-M)$ representa la realización de un proceso AR de orden M si

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + \cdots + a_M^* u(n-M) = \nu(n) \tag{2}$$

donde $a_1, \cdots, a_M$ son constantes denominadas **parámetros AR**, y $\nu(n)$ es el proceso de ruido blanco.

- Consideremos $\Sigma_{k=0}^{M} a_k^* u(n-k) = \nu(n)$, donde $a_0 = 1$, tal que

$$H_A(z)U(z) = V(z)$$

donde $H_A(z)$, $U(z)$ y $V(z)$ son las TZ de las secuencias a_k^*, $u(n)$ y $\nu(n)$ respectivamente.

- Dependiendo de considerar $u(n)$ la entrada o salida de un filtro de interés, la TZ anterior ofrece las siguientes interpretaciones

  1. **Analizador del proceso**, para $u(n)$ como entrada los coeficientes del filtro corresponden con los del modelo AR y la TZ inversa de $H_A(z)$ es la respuesta impulsiva de **duración finita** (FIR), denominado **filtro todo cero**.
  2. **Generador del proceso**, para $u(n)$ como salida el filtro tendrá como función transferencia $H_G(z) = \frac{1}{H_A(z)}$, cuya respuesta impulsiva es de **duración infinita**, denominado **filtro todo polo**.

- Los ceros o polos están determinados por las raíces de la **ecuación característica**

$$1 + a_1^* z^{-1} + a_2^* z^{-2} + \cdots + a_M^* z^{-M} = 0$$

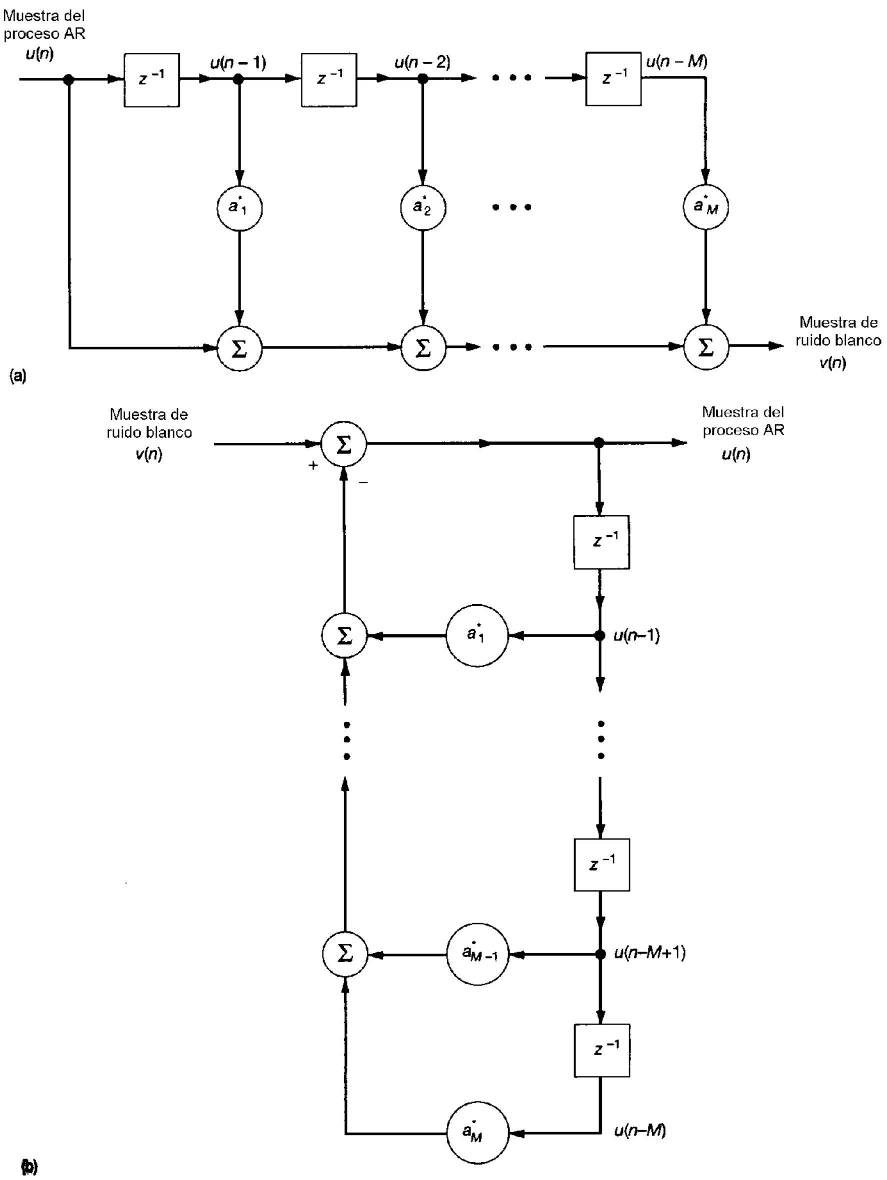

Figura 4: a) Analizador de procesos, b) generador de procesos.

2.3.2 Modelos de promedios moviles (MA)

- Este modelo se describe por

$$u(n) = \nu(n) + b_1^* \nu(n-1) + \cdots + b_K^* \nu(n-K)$$

donde los b_k se denominan **parámetros MA** y $\nu(n)$ es ruido blanco de media cero y varianza σ_ν^2.

- Los filtros asociados al modelo MA, de análisis y generación son los **duales** de los del modelo AR.

2.3.3 Modelos ARMA

- Para generar un proceso mixto autorregresivo - promedios móviles (ARMA), la función transferencia del filtro debe tener ceros y polos.

- Para un proceso de ruido blanco $\nu(n)$ de entrada la ecuación a diferencias será

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + \cdots + a_M^* u(n-M) = \nu(n) + b_1^* \nu(n-1) + \cdots + b_K^* \nu(n-K)$$

donde $a_1, \cdots, a_M$ y $b_1, \cdots, b_K$ son los **parametros ARMA**.

- Desde un punto de vista computacional, y como es más simple su obtención, los modelos AR son más populares que los modelos MA y ARMA.

- Para el primer caso es necesaria la obtención de la solución de un conjunto de ecuaciones lineales, conocidas como ecuaciones de **Yule-Walker**, mientras que para MA y ARMA es necesario en general resolver un sistema de ecuaciones no lineales.

2.3.4 Función correlación de un proceso AR

- En base a la ecuación a diferencias de un proceso AR estacionario, multiplicando por $u(n-l)$ y luego aplicando el operador esperanza obtenemos:

$$E\left[\sum_{k=0}^{M} a_k^* u(n-k)u^*(n-l)\right] = E[\nu(n)u^*(n-l)]$$

- Teniendo en cuenta ahora, la definición de autocorrelación de un proceso estacinario y que el término de la derecha es cero para $l > 0$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{M} a_k^* r(l-k) = 0, \quad l > 0 \tag{3}$$

donde $a_0 = 1$.

- De esta forma la función autocorrelación de un proceso AR satisface la ecuación

$$r(l) = w_1^* r(l-1) + w_2^* r(l-2) + \cdots + w_M^* r(l-m), \quad l > 0 \tag{4}$$

donde $w_k = -a_k$, $k = 1, 2, \cdots, M$.

- La solución general a esta ecuación es del tipo

$$r(m) = \sum_{k=1}^{M} C_k p_k^m$$

donde $C_1, C_2, \cdots, C_M$ son constantes y $p_1, p_2, \cdots, p_M$ son las raíces de la ecuación característica.

- Notar que si se satisface la condición de estabilidad de la ecuación caracterítica la función autocorrelación tiende a cero para m aproximandose a infinito.

- La forma exacta de la contribución de cada polo p_k en la ecuación anterior depende de que el polo sea real o complejo.
  - Para polos reales la contribución será exponencialmente decresciente.
  - Para polos complejos en pares conjugados la contribución será la de una sinusoidal amortiguada.

2.4 Ecuaciones de Yule-Walker

- Para obtener univocamente un modelo AR de orden M, es necesario espeficicar los siguientes parámetros
  1. Los coeficientes AR $a_1, a_2, \cdots, a_M$.
  2. La varianza σ_ν^2 del ruido blanco $\nu(n)$ usado como excitación
- Para el primer conjunto de parámetros utilizamos (4) para $l = 1, 2, \cdots, M$, de forma de obtener el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \cdots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & r(1) & \cdots & r(M-2) \\ & & & \vdots & \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & r^*(M-3) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^* \\ r_2^* \\ \vdots \\ r_M^* \end{bmatrix} \tag{5}$$

  donde $r(0)$, $r(1)$, $\cdots$, $r(M)$ se suponen conocidas y las incognitas son w_1, w_2, $\cdots$, w_M. Este sistema se denomina **ecuaciones de Yule - Walker**.

- En forma compacta pueden expresarse como

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r} \tag{6}$$

  y su solución es

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}$$

- De esta forma existe una relación única entre los coeficientes del modelo AR y los **coeficientes de correlación normalizados** definidos por $\rho_k = \frac{r(k)}{r(0)}$, tal que

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_M\} \rightleftharpoons \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_M\}$$

2.4.1 Varianza del ruido blanco

- Para $l = 0$, la esperanza de la ec. a diferencias de un proceso AR toma la forma

$$E[\nu(n)u^*(n)] = E[u(n)u^*(n)] = \sigma_\nu^2$$

  donde σ_ν^2 es la varianza del ruido de media cero $\nu(n)$.

- De esta forma del lado izquierdo de esa ecuación se obtiene

$$\sigma_\nu^2(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k r(k) \tag{7}$$

  donde $a_0 = 1$.

- De aqui que dadas las autocorrelaciones $r(0)$, $r(1)$, $\cdots$, $r(M)$ es posible determinar la varianza del ruido σ_ν^2.

2.4.2 Ejemplo: AR de segundo orden

- Se ilustrará los aspectos de modelado AR estudiados para el caso de un proceso AR de segundo orden con coeficientes reales.
- La descripción en el domínio tiempo es

$$u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) = \nu(n)$$

donde σ_ν^2 se elige para que la varianza de $u(n)$ sea unitaria.

- **Función autocorrelación**. La solución de la ecuación a diferencias (4) para el caso de segundo orden, o sea

$$r(m) + a_1 r(m-1) + a_2 r(m-2) = 0, \quad m > 0 \tag{8}$$

requiere de la especificación de condiciones iniciales para $r(0)$ y $r(1)$ que sustituidas en (8), permite obtener una solución general del tipo

$$r(m) = C_1 p_1^m + C_2 p_2^m$$

donde p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación característica $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$. Las condiciones iniciales se eligen como

$$\begin{aligned} r(0) &= \sigma_u^2 \\ r(1) &= \frac{-a_1}{1+a_2}\sigma_u^2 \end{aligned}$$

- Existen dos casos específicos a ser considerados, dependiendo de que el tipo de raíces p_1 y p_2 sean reales o complejas:
  - **Raíces reales**: En este caso se tiene que $a_1^2 - 4a_2 > 0$ y la función autocorrelación se mantiene positiva mientras se desvanece o se amortigua alternando el signo, correspondiendo a una una raíz dominante positiva o negativa respectivamente.
  - **Raíces complejas**: En este caso $a_1^2 - 4a_2 < 0$. En ese caso la función autocorrelación muestra un comportamiento seudoperiódico amortiguado.
- **Ecuaciones de Yule - Walker**. De la ecuación (5) para $M = 2$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \end{bmatrix}$$

de donde resolviendo para w_1 y w_2 se obtiene

$$\begin{aligned} w_1 &= -a_1 = \frac{r(1)[r(0) - r(2)]}{r^2(0) - r^2(1)} \\ w_2 &= -a_2 = \frac{r(0)r(2) - r^2(1)]}{r^2(0) - r^2(1)} \end{aligned}$$

y expresando $r(1)$ y $r(2)$ en términos de a_1 y a_2

$$\begin{aligned} r(1) &= \frac{-a_1}{1 + a_2}\sigma_u^2 \\ r(2) &= \left(-a_2 + \frac{a_1^2}{1 + a_2}\right)\sigma_u^2 \end{aligned}$$

donde $\sigma_u^2 = r(0)$.

- **Varianza del ruido blanco.** La varianza del proceso de ruido blanco $\nu(n)$ se puede obtener de

$$\sigma_\nu^2 = r(0) + a_1 r(1) + a_2 r(2)$$

de forma que sustituyendo se obtiene

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{1+a_2}{1-a_2}\right)\frac{\sigma_\nu^2}{[(1+a_1)^2 - a_1^2]}$$

2.5 Densidad espectral de potencia

- Considerando una ventana de N muestras de un proceso estocástico estacionario $u(n)$, al cual definimos como

$$u_N(n) = \begin{cases} u(n), & n = 0, 1, \cdots, N-1 \\ 0, & n > N,\ n < 0 \end{cases}$$

- Por definición, la **Transformada de Fourier de tiempo discreto** (DTFT) de $u_N(n)$ está dada por

$$U_N(w) = \sum_{n=0}^{N-1} u_N(n) e^{-jwn}$$

donde w es la **frecuencia digital** $(-\pi \leq w \leq \pi]$.

- En particular, el valor esperado de la magnitud de la DTFT de $U_N(w)$ tendrá la forma

$$E\left[|U_N(w)|^2\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} E\left[u_N(n) u_N^*(k) e^{-jw(n-k)}\right.$$

donde teniendo en cuenta que la función autocorrelación de $u_N(n)$ para el retardo $n-k$ es $r_N(n-k) = E\left[u_N(n) u_N^*(k)\right]$, en función de $u(n)$ será

$$r_N(n-k) = \begin{cases} E\left[u(n) u^*(k)\right] = r(n-k), & n = 0, 1, \cdots, N-1 \\ 0, & n > N,\ n < 0 \end{cases}$$

de esta forma, con $l = n - k$, es posible escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E\left[|U_N(w)|^2\right] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} r(n-k) e^{-jw(n-k)} \\ &= \sum_{l=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|l|}{N}\right) r(l) e^{-jwl} \end{aligned}$$

que puede interpretarse como la DTFT del producto de dos secuencias: $r(l)$, la autocorrelación de $u(n)$, y la ventana $w_B(l) = 1 - \frac{|l|}{N}$, $|l| \leq N-1$.

- En particular para $N \to \infty$, la anterior converge a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} E\left[|U_N(w)|^2\right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r(l) e^{-jwl} = S(w)$$

tal que, cuando el limite existe, $S(w)$ se denomina **densidad espectral de potencia**.

2.5.1 Propiedades

1. **La función autocorrelación y la densidad espectral de potencia de un proceso estocástico estacionario en sentido amplio constituyen un par de Fourier.**

$$S(w) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r(l)e^{-jwl}, \quad -\pi < w \leq \pi$$
$$r(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(w)e^{-jwl}dw, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

que se denominan **relaciones de Wiener-Khintchine**.

2. **El rango de frecuencias de soporte de la densidad espectral de potencia** $S(w)$ **es** $(-\pi \leq w \leq \pi]$.

Fuera de este intervalo, $S(w)$ es periódica, ya que

$$S(w + 2k\pi) = S(w) \quad \text{para todo entero } k$$

3. **La densidad espectral de potencia de un proceso estocástico estacionario es real.**

Reescribiendo la definición de $S(w)$ como

$$S(w) = r(0) + \sum_{k=1}^{\infty} r(k)e^{-jwk} + \sum_{k=-\infty}^{-1} r(k)e^{-jwk}$$

con un cambio de variables $(k = -k)$ en el tercer término de esta ecuación y teniendo en cuenta que $r(-k) = r*(k)$, se obtiene

$$S(w) = r(0) + \sum_{k=1}^{\infty}[r(k)e^{-jwk} + r^*(k)e^{jwk}]$$
$$= r(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\Re[r(k)e^{-jwk}]$$

de forma que $S(w)$ es una función real de w (lo que además justifica la notación y no la de $S(w)$.

4. **La densidad espectral de potencia de un proceso estocástico estacionario real es una función par (o sea simétrica).**

   Si el proceso estocástico es real es simple verificar por la definición que $S(-w) = S(w)$, lo que indica que $S(w)$ es una función parde w, o sea es simétrica respecto al origen. Por otro lado, si el proceso estocástico es complejo, entonces $r(-k) = r^*(k)$, en cuyo caso $S(-w) \neq S(w)$ y $S(w)$ no es una función par de w.

5. **El valor medio cuadrático de un proceso estocástico estacionario es igual (excepto por un factor de escala de $1/2\pi$) al area bajo la curva de la densidad espectral de potencia.**

   Esta propiedad puede demostrarse del par de transformación para $l = 0$, de donde se obtiene

$$r(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(w)dw$$

6. **La densidad espectral de potencia de un proceso estocástico estacionario no puede ser negativa, o sea: $S(w) \geq 0$ para todo w.**

2.5.2 Ruido blanco a través de filtros lineales

- Una pregunta clave que puede uno hacerse a esta altura es: que sucede cuando una señal ESA pasa a través de un filtro lineal $H(z)$? Es posible verificar que la salida es también una señal ESA. No es dificil mostrar que si la entrada tiene media cero, también lo tendrá la salida.

- El problema interesante es obtener los momentos de segundo orden de la salida dada la secuencia de autocorrelación de la entrada y la respuesta impulsiva del filtro. La situación se verá simplificada considerando la entrada ruido blanco por ser la señal de prueba para el caso de trabajar con procesos estocásticos.

- Las propiedades más importantes obtenibles con entrada ruido blanco están relacionadas sin embargo con dos filtros. Consideremos dos filtros lineales $x(n) = F(z)u(n)$, $y(n) = G(z)u(n)$ cuya entrada es la misma señal ruido blanco. Analizaremos como están correlacionadas las señales $x(n)$ e $y(n)$. Para $f(n)$ y $g(n)$ las respuestas impulsivas asociadas a cada filtro es posible obtener

$$E[x(n)y(n)] = \sum_m f(m)g(m)$$

- Asociando este resultado con el que se obtiene a partir de la **Identidad de Parseval** se obtiene

$$E[x(n)y(n)] = \sum_m f(m)g(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{jw})G^*(e^{jw})dw \quad (9)$$

- Estas tres ecuaciones representan tres clases de productos internos con diferentes interpretaciones del mismo fenomeno.
  - El primero involucra señales ESA;
  - el segundo secuencias en el domínio tiempo,
  - y el tercero, funciones en el domínio frecuencia.

  Si podemos obtener un modelo para el cual dos señales ESA pueden obtenerse de ruido blanco, entonces podemos estudiar la relación entre esas dos señales en tres formas.

- Como aplicación de esta construcción es posible obtener todos los momentos de segundo orden para el caso de un solo filtro alimentado con ruido blanco, $s(n) = H(z)u(n)$.
  - Dado que tenemos dos señales ESA, tendremos tres momentos para calcular, o sea
    * Autocorrelación de la entrada: $r_{uu}(k) = E[u(n+k)u(n)]$.
    * Correlación cruzada entre entrada y salida: $r_{su}(k) = E[s(n+k)u(n)]$.
    * Autocorrelación de la salida: $r_{ss}(k) = E[s(n+k)s(n)]$.
  - Por suposición: $r_{uu}(n) = \delta(n) \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} S_{uu}(w) = 1$.
  - Para calcular la correlación cruzada entre $s(n)$ y $u(n)$ tenemos en cuenta los dos filtros del estudio anterior con

$$\begin{aligned} F(z) &= z^n H(z) \Rightarrow x(n) = s(n+k) \\ G(z) &= 1 \Rightarrow y(n) = u(n) \end{aligned}$$

luego, usando (9)

$$r_{su}(k) = E[s(n+k)u(n)] = \sum_n f(n)g(n) = \sum_n h(n+k)\delta(n) = h(k)$$

tal que

$$r_{su}(k) = h(k) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} S_{su}(w) = H\left(e^{jw}\right)$$

– Para calcular la autocorrelación de la salida, usando la construcción de los dos filtros elegimos

$$\begin{aligned} F(z) &= z^n H(z) \Rightarrow x(n) = s(n+k) \\ G(z) &= H(z) \Rightarrow y(n) = s(n) \end{aligned}$$

Luego, usando (9)

$$r_{ss}(k) = E\left[s(n+k)s(n)\right] = \sum_n f(n)g(n) = \sum_n h(n+k)h(n)$$

Notar que dado que el lado izquierdo de esta ecuación es independiente de la señal será ESA.

– Usando la segunda igualdad de (9), tenemos

$$\begin{aligned} r_{ss}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{jnw}H\left(e^{jw}\right)][H^*(e^{jw})]dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H^*(e^{jw})\right|^2 e^{jnw}dw \end{aligned}$$

Dado que esta es una DTFT inversa, se obtiene finalmente

$$r_{ss}(k) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} S_{ss}(w) = \left|H\left(e^{jw}\right)\right|^2 \tag{10}$$

Ejemplo: La densidad espectral de potencia de un filtro lineal con entrada ruido blanco.

- Supongamos que una secuencia de ruido blanco $u(n)$ se usa para excitar un filtro digital con la siguiente ecuación a diferencias

$$y(n) = u(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

- De la relación anterior sabemos que $S_{yy}(w) = |H(e^{jw})|^2$, luego como

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

tendremos que

$$S_{yy}(w) = |H(e^{jw})|^2 = \left| \frac{1}{1 + a_1 e^{-jw} + a_2 e^{-j2w}} \right|^2$$

2.5.3 El teorema de Wiener - Khintchine

Si $x(n)$ es ESA e $y(n)$ es la salida de un filtro lineal $h(n)$: $y(n) = h(n) * u(n)$. Cual es $S_{yy}(w)$? Como caso especial, consideremos a $x(n)$ generada a partir de $u(n)$ una secuencia de ruido blanco, $x(n) = g(n) * u(n)$. De esta forma tendremos

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * g(n) * u(n)$$

Usando la ecuación (10) dos veces

$$\begin{aligned} S_{xx}(w) &= |G(e^{jw})|^2 \\ S_{yy}(w) &= |G(e^{jw}) H(e^{jw})|^2 = S_{xx}(w) |H(e^{jw})|^2 \end{aligned}$$

2.5.4 Ruido coloreado a través de filtros lineales

- Es posible extender la construcción de los dos filtros $F(z)$ y $G(z)$, que satisfacen (9), para el caso en que la entrada $u(n)$ ahora sea una señal ESA en general.

- Si $u(n)$ es la entrada coloreada con secuencia de autocorrelación $r_{uu}(n)$, y como $x(n) = f(n)*u(n)$ y $y(n) = g(n)*u(n)$, tenemos que

$$\begin{aligned} r_{xy}(k) &= E[x(n+k)y(n)] = \sum_m \sum_l f(m)g(l)E[u(n+k-m)u(n-l) && (11) \\ &= \sum_m \sum_l r_{uu}(n-m+l) && (12) \end{aligned}$$

- La DTFT de esta secuencia de correlación cruzada es

$$\begin{aligned} S_{xy}(w) &= \sum_k r_{xy}e^{-jw} \\ &= \sum_k \sum_m \sum_l [f(m)e^{-jmw}][g(n)e^{-jnw}][r_{uu}(n-m+l)e^{-j(n-m+l)w}] \\ &= F(e^{jw})[G(e^{jw})]^* S_{uu}(w) \end{aligned}$$

- Notar que si $F(z) = G(z)$, entonces $x(n) = y(n)$ y el resultado es la relación de Wiener-Kintchine. Haciendo $k = 0$ en la ecuación (11) se obtiene una generalización de (9).

$$\begin{aligned} E[x(n)y(n)] &= \sum_m \sum_l r_{uu}(n-m) \\ &= F(e^{jw})[G(e^{jw})]^* S_{uu}(w) \end{aligned}$$

2.5.5 El problema de modelado

- Dada una señal $y(n)$ ESA con densidad espectral de potencia $S_{yy}(w)$, es posible modelar esta señal como la salida de un filtro lineal cuya entrada es ruido blanco? En otras palabras, es posible hallar $G(z)$ tal que $S_{yy}(w) = |G(e^{jw})|^2$?
- El problema puede ser trivial si consideramos

$$G(e^{jw}) = [S_{yy}(w)]^{1/2}$$

Esto es posible solo si $y(n)$ tiene potencia finita, o sea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{jw})|^2 dw \ < \ \infty$$

- Debe tenerse encuenta que tal $g(n)$ puede no ser **causal**. Dado que $G(e^{jw})$ es real y par, entonces también lo es $g(n)$.
- La solución entonces es claramente no única, dado que si $F(z)$ es cualquier filtro pasatodo tal que $|F(e^{jw})| = 1$, entonces $|G(e^{jw})|^2 = |G(e^{jw})F(e^{jw})|^2$.
- La pregunta resulta mucho más interesante si se requiere que $G(z)$ sea causal. Esta cuestión resulta crítica para la solución de varios problemas de filtrado general en sentido medio cuadrático.
- La solución se obtiene a partir de la **Condición de Szëgo**: Suponiendo $S_{yy}(w)$ real, par, no negativa, de potencia finita y satisface

$$e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln[S_{yy}(w)]dw} \ > \ 0$$

entonces existe una secuencia $g(n)$ de energía finita causal que es solución del problema.

2.6 El problema de los autovalores

- En relación a la matriz correlación de un proceso ESA, $\boldsymbol{R}$ interesa hallar $\boldsymbol{q}$ que satisfaga

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{q} = \lambda\boldsymbol{q}$$

para alguna constante λ. $\boldsymbol{q}$ así formado se mantiene invariante en dirección a partir de transformacipnes lineales.

- Para $\boldsymbol{R}$ de $(M \times M)$ deben existir típicamente M de esos vectores. En particular reescribiendo

$$(\boldsymbol{R} - \lambda\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$$

- La matriz $(\boldsymbol{R} - \lambda\boldsymbol{I})$ debe ser singular, de forma que esta ecuación tendrá alguna solución no nula en el vector $\boldsymbol{q}$ si y solo si

$$\det(\boldsymbol{R} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

- Este determinante, expandido, es un polinomio en λ de orden M, la **ecuación característica**. En general tendrá M raíces distintas correspondientes a las soluciones en el vector $\boldsymbol{q}$.

- Las raíces de ese polinomio $\lambda_1, \cdots, \lambda_M$ son los **autovalores** de la matriz $\boldsymbol{R}$, que pueden no ser necesariamente distintos. Si λ_i es un autovalor de la matriz $\boldsymbol{R}$, entonces un vector $\boldsymbol{q}_i$ que verifica

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i = \lambda_i\boldsymbol{q}_i$$

se denomina **autovector** asociado a λ_i.

Ejemplo: Ruido blanco

La matriz correlación que representa un proceso de ruido blanco está dada por

$$\boldsymbol{R} = diag(\sigma^2, \sigma^2, \cdots, \sigma^2)$$

donde σ^2 es la varianza del proceso. Esta matriz correlación $\boldsymbol{R}$ tiene un único autovalor igual a la varianza σ^2 de multipicidad M. Cualquier vector de $(M \times 1)$ puede ser un autovector, lo que muestra que un autovalor puede tener múltiples autovectores asociados.

Ejemplo: Sinusoidal compleja

Considerando una secuencia cuyos elementos son muestras de una sinusoidal compleja con fase aleatória y potencia unitaria, su matriz correlación puede escribirse como

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & e^{jw} & \cdots & e^{j(M_1)w} \\ e^{-jw} & 1 & \cdots & e^{j(M-2)w} \\ & & \vdots & \\ e^{-j(M-1)w} & e^{-j(M-2)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde w es la frecuencia angular de la sinusoidal compleja. El vector

$$\boldsymbol{q} = [1, \; e^{-jw}, \; \cdots, \; e^{-j(M-1)w}]^T$$

es un autovector de $\boldsymbol{R}$ y el autovalor correspondiente es M. Notar que la matriz de correlación $\boldsymbol{R}$ tiene **rango** 1, lo cual significa que cualquier columna de $\boldsymbol{R}$ puede expresarse como una combinación lineal de las columnas restantes. Esto significa también que los otros autovalores son cero con multiplicidad $M - 1$.

2.6.1 Propiedades

1. **Si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ son los autovalores de la matriz de correlación $\boldsymbol{R}$, entones los autovalores de la matriz $\boldsymbol{R}^k$ son $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_M^k$, para cualquier $k > 0$.**

2. **Sean $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_M$ los autovectores correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ de $\boldsymbol{R}$, respectivamente. Entonces los autovectores $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_M$ son linealmente independientes.**

   (Un uso importante de esta propiedad es en el uso de autovectores como **base** de representación de un vector arbitrário $\boldsymbol{w}$. En particular, es posible representarlo como

   $$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{M} \nu_i \boldsymbol{q}_i$$

   donde los ν_i son constantes. Aplicando ahora una transformación lineal sobre $\boldsymbol{w}$ a través de la premultiplicación por una matriz $\boldsymbol{R}$ se obtiene

   $$\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{M} \nu_i \boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i$$

   pero como por definición $\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i = \lambda_i \boldsymbol{q}_i$ se tendrá que

   $$\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{M} \nu_i \lambda_i \boldsymbol{q}_i$$

   tal que el efecto es multiplicar cada autovector por el respectivo autovalor.)

3. **Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ los autovalores de la matriz correlación $\boldsymbol{R}$. Entonces todos los autovalores deben ser reales y no negativos.**

4. **Sean $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_M$ los autovectores correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ de $\boldsymbol{R}$, respectivamente. Entonces los autovectores $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_M$ son ortogonales entre sí.**

5. **Transformación de similaridad unitaria. Sean $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{q}_M$ los autovectores correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ de $\boldsymbol{R}$, respectivamente. Definamos la matriz**

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_M]$$

donde $\boldsymbol{q}_i^H \boldsymbol{q}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Definamos además una matriz diagonal

$$\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M)$$

Entonces la matriz $\boldsymbol{R}$ puede diagonalizarse como

$$\boldsymbol{Q}^H \boldsymbol{R} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$$

6. **Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ los autovalores de la matriz correlación $\boldsymbol{R}$. Entonces la suma de esos autovalores es igual a la traza de la matriz $\boldsymbol{R}$.**

7. **La matriz correlación es mal condicionada si la relación entre el máximo y el mínimo autovalor de $\boldsymbol{R}$ es grande.**

8. **Los autovalores de la matriz correlación de un proceso estocástico están acotados por los valores mínimos y máximos de la densidad espectral de potencia del proceso.**