3 Filtros de Wiener

3.1 El problema de filtrado óptimo lineal

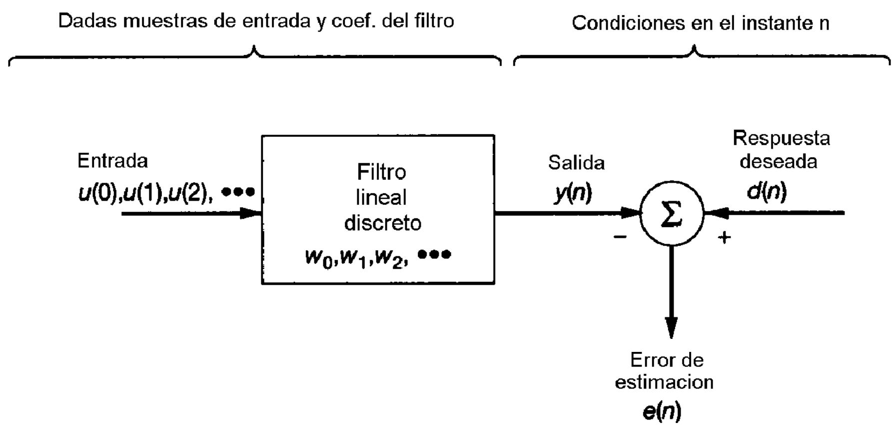


Figura 5: Representación del problema de filtrado estadístico.

- Se han introducido dos restricciones al filtro:
  1. Que el filtro sea **lineal**, lo cual conduce a un tratamiento estadístico manejable.
  2. Que el filtro opere en **tiempo discreto**, lo cual hace posible que sea implementado utilizando hardware/software digital.
- Los detalles de las especificaciones del filtro dependerán sin embargo de otras dos elecciones que deben realizarse:
  1. Que la respuesta impulsiva del filtro sea de duración **finita** o **infinita**.
  2. El tipo de **critério estadístico** a ser utilizado en la optimización.

- La elección de filtros de **respuesta finita al impulso** (FIR) o **respuesta infinita al impulso** (IIR) queda determinada por **consideraciones prácticas**. Las discusiones en esta sección y las siguientes se realizarán en base a filtros FIR.

- La elección del critério estadístico para optimizar el diseño del filtro está influenciada por la simplicidad del **análisis formal** del problema. Es posible elegir un diseño para **minimizar una función costo** definida por ejemplo por

  - El valor medio cuadrático del error de estimación.
  - La esperanza del valor absoluto del error de estimación.
  - La esperanza de la tercera o cuarta potencia del valor absoluto del error de estimación.

  Claramente la opción 1 tiene ventajas sobre las otras dos debido a que conduce a un tratamiento matemático manejable.

Resumiendo, la esencia del problema de filtrado:

> Diseñar un filtro lineal discreto cuya salida $y(n)$ permita obtener una estimación de la respuesta deseada $d(n)$, dadas un conjunto de muestras $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, $\cdots$, tal que el valor medio cuadrático del error de estimación $e(n)$, definido como la diferencia entre la respuesta deseada $d(n)$ y la salida del filtro $y(n)$ sea minimizada.

Nuestra forma de aproximación a la solución del problema

- estudio de un importante teorema: **el principio de ortogonalidad**.

- comportamiento de la **superficie de desempeño del error**.

3.2 El principio de ortogonalidad

- La salida del filtro puede escribirse como una convolución lineal

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k), \quad n = 0, 1, \cdots \tag{13}$$

donde $*$ denota **conjugación compleja**.

- El propósito del filtro de la figura (5) es generar una respuesta deseada $d(n)$. Suponemos en general que la entrada del filtro e la respuesta deseada son realizaciones de procesos ESA.

- La estimación de $d(n)$ se acompaña por un error definido por

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

- Para **optimizar el diseño del filtro elegimos minimizar el valor medio cuadrático del error de estimación** $e(n)$. Es posible entonces definir la función costo como

$$J = E[e(n)e^*(n)] = E\left[|e(n)|^2\right]$$

donde E denota el **operador esperanza estadística**. El problema es entonces determinar las condiciones de operación para las cuales J alcanza su valor mínimo.

- Para datos de entrada complejos, los coeficientes son en general complejos. Si w_k es el k-ésimo coeficiente será $w_k = a_k + jb_k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. Entonces podemos definir el gradiente $\boldsymbol{\nabla}$ y para el k-ésimo coeficiente será

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j\frac{\partial}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- Luego aplicando el operador $\boldsymbol{\nabla}$ a la función costo J obtenemos un vector gradiente $\boldsymbol{\nabla} J$, cuyo k-ésimo elemento es

$$\nabla_k J = \frac{\partial J}{\partial a_k} + j\frac{\partial J}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- Notar que para que la definición del gradiente complejo sea válida es necesario que la función costo J sea **real**. El operador gradiente se utiliza siempre en la obtención de los **puntos estacionarios** de la función de interés. Esto significa que la restricción compleja debe convertirse a un par de restricciones reales.

- Para que la función costo alcance su valor mínimo, todos los elementos del gradiente $\boldsymbol{\nabla} J$ deben ser simultaneamente cero, o sea

$$\nabla_k J =), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- La función costo J es un escalar independiente de n, de esta forma

$$\begin{aligned}\nabla_k J \; = \; & E\left[\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} e(n)\right.\\ & \left.\frac{\partial e(n)}{\partial b_k} j\ e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} j\ e(n)\right]\end{aligned}$$

- Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} &= -u(n-k) \\
\frac{\partial e(n)}{\partial b_k} &= j\; u(n-k) \\
\frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} &= -u^*(n-k) \\
\frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} &= -j\; u^*(n-k)
\end{aligned}$$

de forma que

$$\nabla_k J = -2E[u(n-k)e^*(n)]$$

- Si $e_o(n)$ es el valor particular del error de estimación para el filtro opera en la condición de mínimo, en ese caso se verifica que

$$E[u(n-k)e^*(n)] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

En palabras esta ecuación puede sintetizarse como el **principio de ortogonalidad**

> La condición necesaria y suficiente para que la función costo J alcance su valor mínimo es que el valor correspondiente del error de estimación $e_o(n)$ sea ortogonal a cada muestra que permite obtener la respuesta deseada en el instante n.

3.2.1 Corolario del principio de ortogonalidad

- Utilizando la ecuación (13) es posible expresar

$$E[y(n)e^*(n)] = E[\sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k)e^*(n)] = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* E[u(n-k)e^*(n)]$$

- **Si y_o es la salida del filtro optimizada en sentido medio cuadrático, con $e_o(n)$ el correspondiente error de estimación**, entonces en base al principio de ortogonalidad

$$E[y_o(n)e_o^*(n)] = 0$$

- Si $\hat{d}(n|U_n)$ es la estimación de la respuesta deseada óptima en sentido medio cuadrático sobre datos de entrada sobre U_n e incluyendo n, entonces

$$\hat{d}(n|U_n) = y_o(n)$$

- Notar que la estimación $\hat{d}(n|U_n)$ tiene media cero debido a que las entradas se suponen de media cero. Esta condición es compatible con la suposición de media cero sobre la respuesta deseada $d(n)$.

3.3 El error medio cuadrático mínimo

- Cuando el filtro lineal opera en su condición óptima, la ecuación del error toma la forma

$$e_o(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \hat{d}(n|U_n)$$

de donde $d(n) = \hat{d}(n|U_n) + e_o(n)$.

- Si J_{min} es el error medio cuadrático mínimo $J_{min} = E\left[|e_o(n)|^2\right]$, entonces usando el corolario del principio de ortogonalidad se obtiene

$$\sigma_d^2 = \sigma_{\hat{d}}^2 + J_{min}$$

donde σ_d^2 es la varianza de la respuesta deseada y $\sigma_{\hat{d}}^2$ es la varianza de la estimación $\hat{d}(n|U_n)$.

- De esta ecuación es posible obtener

$$J_{min} = \sigma_d^2 - \sigma_{\hat{d}}^2 \qquad (14)$$

que muestra que para un filtro óptimo el error medio cuadrático mínimo es igual a la diferencia entre las varianzas de la respuesta deseada y la estimada.

3.4 Ecuaciones de Wiener-Hopf

- En forma más general el principio de ortogonalidad puede escribirse como

$$E\left[u(n-k)\left(d^*(n)-\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi}u^*(n-i)\right)\right]=0, \quad k=0,1,2,\cdots$$

donde w_{oi} es el i-ésimo coeficiente en la respuesta impulsiva del filtro óptimo.

- Reordenando esta ecuación se obtiene

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi}E[u(n-k)u^*(n-i)]=E[u(n-k)d^*(n)], \quad k=0,1,2,\cdots$$

- Que puede escribirse como

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi}r(i-k)=p(-k), \quad k=0,1,2,\cdots$$

que se denominan **ecuaciones de Wiener- Hopf**.

3.4.1 Solución para filtros lineales transversales

La solución del conjunto de ecuaciones de Wiener-Hopf se simplifica considerablemente para el caso especial en que se utilice un filtro transversal o FIR para obtener una estimación de la respuesta deseada $d(n)$, como se muestra en la figura (6).

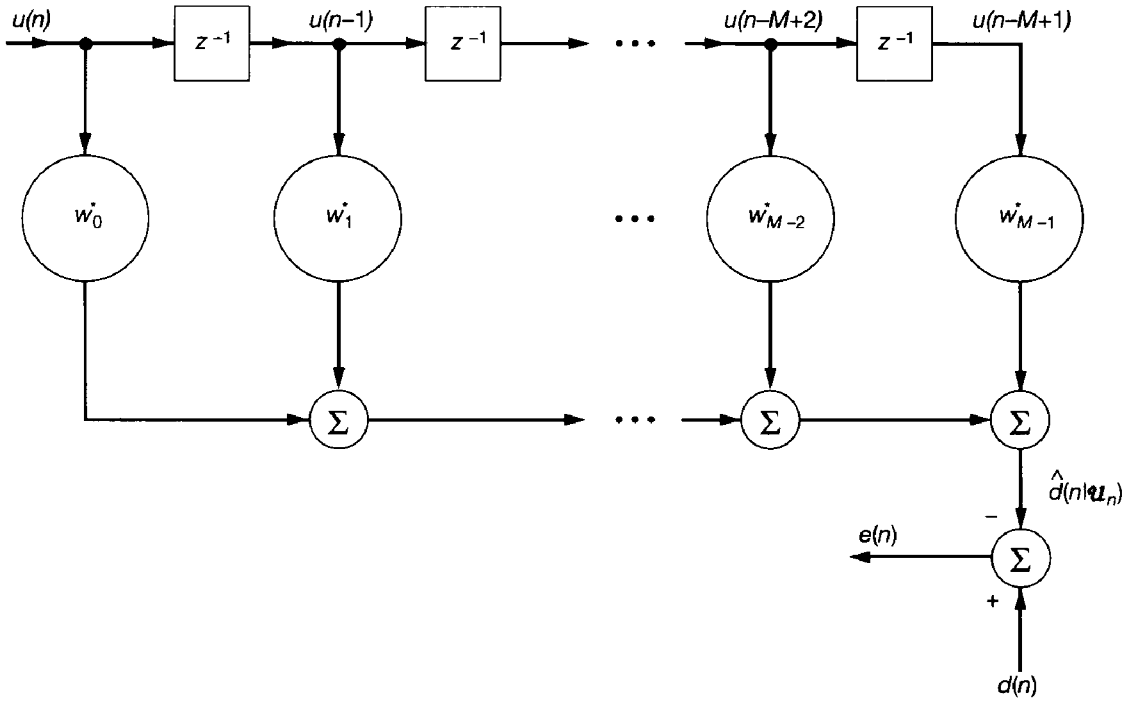


Figura 6: Filtro transversal.

En ese caso las ecuaciones de Wiener-Hopf se convierten en un **conjunto de M ecuaciones simultaneas** dadas por

$$\sum_{i=0}^{M-1} w_{oi} r(i-k) = p(-k), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots M - 1 \tag{15}$$

3.4.2 Formulación matricial

Si $\boldsymbol{R}$ es la matriz de correlación de la entrada de $u(n)$ a $u(n-M+1)$ al filtro transversal, entonces $\boldsymbol{R} = E[\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{U}^H(n)]$, donde

$$\boldsymbol{u}(n) = [u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M+1)]^T$$

En forma expandida

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ & & \vdots & \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

Además el vector de correlaciones cruzadas es $\boldsymbol{p} = E[\boldsymbol{u}(n)d^*(n)]$, tal que

$$\boldsymbol{p}(n) = [p(0), p(-1), \cdots, p(1-M)]^T$$

tal que las ecuaciones de Wiener-Hopf pueden reescribirse en forma matricial como

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_o = \boldsymbol{p}$$

donde $\boldsymbol{w}_o$ es el vector de **coeficientes óptimos** del filtro transversal, o sea

$$\boldsymbol{w}_o = [w_{o0}, w_{o1}, \cdots, w_{o,M-1}]^T$$

Dado que la matriz de correlación es generalmente no singular, la solución de las ecuaciones de Wiener-Hopf será

$$\boldsymbol{w}_o = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}$$

3.5 Superficie de Error

- Las ecuaciones de Wiener-Hopf como discutidas están relacionadas con el principio de ortogonalidad.
- Es posible obtener esas ecuaciones examinando la dependencia en la función costo J de los coeficientes del filtro transversal. Con ese objetivo $e(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* u(n-k)$, tal que

$$\begin{aligned} J &= E[e(n)e^*(n)] \\ &= E[|d(n)|^2] - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* E[u(n-k)d^*(n)] - \sum_{k=0}^{M-1} w_k E[u^*(n-k)d(n)] \\ &+ \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{M-1} w_k^* w_i E[u(n-k)u^*(n-i)] \end{aligned}$$

- Es posible reconocer
  - Para la primera esperanza tenemos $\sigma_d^2 = E\left[|d(n)|^2\right]$, donde σ_d^2 es la **varianza** de la respuesta deseada $d(n)$, supuesta de media cero.
  - Para el segundo y el tercer término se tiene

$$\begin{aligned} p(-k) &= E\left[u(n-k)d^*(n)\right] \\ p^*(-k) &= E\left[u^*(n-k)d(n)\right] \end{aligned}$$

  donde $p(-k)$ es la correlación cruzada entre $u(n-k)$ y $d(n)$.
  - Finalmente, pare el cuarto término se tiene

$$r(i-k) = E\left[u(n-k)u^*(n-i)\right]$$

  donde $r(i-k)$ es la función autocorrelación para el retardo $i-k$.

- De esta forma

$$J = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* p(-k) + \sum_{k=0}^{M-1} w_k p^*(-k) + \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{M-1} w_k^* w_i r(i-k) \qquad (16)$$

- J es **una función de segundo orden de los coeficientes del filtro** y define en relación a los coeficientes $w_0, w_1, \cdots, w_{M-1}$ una **una superficie paraboloide de $M+1$ dimensiones, con M grados de libertad representados por esos coeficientes**, caracterizada por un único mínimo y denominada **superficie de desempeño del error** del filtro transversal.

- En el mínimo de la superfície de error, la función costo J alcanza su valor mínimo de J_{min}. En este punto el vector gradiente $\boldsymbol{\nabla} J$ es igual a cero. En otras palabras

$$\nabla_k J = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, M-1 \qquad (17)$$

donde $\nabla_k J$ es el k-ésimo elemento del vector gradiente.

- Teniendo en cuenta como antes la parte real e imaginaria de w_k como $w_k = a_k + jb_k$, es posible reescribir $\nabla_k J$ en base a (16) de la siguiente forma

$$\nabla_k J = \frac{\partial J}{\partial a_k} + j\frac{\partial J}{\partial b_k} = -2p(-k) + 2\sum_{i=0}^{M-1} w_i r(i-k)$$

tal que aplicando la condición de optimalidad de la ecuación (17) se obtiene

$$\sum_{i=0}^{M-1} w_{oi} r(i-k) = p(-k), \quad k = 0, 1, \cdots, M-1$$

donde $w_{o0}, w_{o1}, \cdots, w_{o,M-1}$ son los coeficientes óptimos del filtro transversal. Estas ecuaciones son idénticas a las de Wiener-Hopf.

3.5.1 Error medio cuadrático mínimo

- Si $\hat{d}(n|U_n)$ es la estimación de la respuesta deseada $d(n)$, entonces

$$\hat{d}(n|U_n) = \sum_{k=0}^{M-1} w_{ok}^* u(n-k) = \boldsymbol{w}_o^H \boldsymbol{u}(n)$$

de donde

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{d}}^2 &= E[\boldsymbol{w}_o^H \boldsymbol{u}(n) \boldsymbol{u}^H(n) \boldsymbol{w}_o] \\ &= \boldsymbol{w}_o^H E[\boldsymbol{u}(n) \boldsymbol{u}^H(n)] \boldsymbol{w}_o = \boldsymbol{w}_o^H \boldsymbol{R} \boldsymbol{w}_o \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{R}$ es la matriz correlación.

- En particular es posible reescribir esta ecuación, usando la solución óptima de los coeficientes como

$$\sigma_{\hat{d}}^2 = \boldsymbol{w}_o^H \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^H \boldsymbol{w}_o$$

- Para evaluar el error medio cuadrático mínimo producido por el filtro transversal usamos esta última ecuación en (14) para obtener

$$J_{min} = \sigma_d^2 - \boldsymbol{p}^H \boldsymbol{w}_o = \sigma_d^2 - \boldsymbol{p}^H \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{p}$$

3.5.2 Forma canónica de la superficie de error

- Utilizando la notación matrical

$$J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 - \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}^H\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^H\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}$$

- Completando cuadrados sobre $J(\boldsymbol{w})$ en $\boldsymbol{w}$

$$J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 - \boldsymbol{p}^H\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p} + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})^H\boldsymbol{R}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})$$

de donde obviamente es posible concluir que

$$\min_{\boldsymbol{w}} J(\boldsymbol{w}) = \sigma_d^2 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}$$

para $w_o = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}$. De esta forma

$$J(\boldsymbol{w}) = J_{min} + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p})^H\boldsymbol{R}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}) \qquad (18)$$

- Considerando que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^H$

$$J(\boldsymbol{w}) = J_{min} + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_o)^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^H(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_o)$$

- Con una transformación sobre $\boldsymbol{w}$, de la forma $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{Q}^H(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_o)$, es posible reescribir (18) en la forma **canónica**

$$J(\boldsymbol{w}) = J_{min} + \boldsymbol{\nu}^H \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\nu}$$

- En esta nueva formulación del error medio cuadrático no existen productos cruzados, de forma que

$$J = J_{min} + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \nu_k \nu_k^* = J_{min} + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k |\nu_k|^2$$

  donde ν_k es la k-ésima componente del vector $\boldsymbol{\nu}$.

- El aspecto práctico de esta última representación es que $\boldsymbol{\nu}$ constituye el **sistema principal de coordenadas** de la superfície de desempeño.

3.5.3 Ejemplo

- La señal deseada $d(n)$ es un modelo AR de primer orden

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + 0.8458z^{-1}}$$

con una entrada $\nu_1(n)$ ruido blanco de media cero y varianza $\sigma_1^2 = 0.27$. $d(n)$ se aplica a un canal de comunicaciones modelado por un filtro de la forma

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + 0.9458z^{-1}}$$

- La salida del canal $x(n)$ tiene una perturbación $\nu_2(n)$, ruido blanco de media cero y varianza $\sigma_2^2 = 0.1$, tal que la señal recibida es $u(n) = x(n) + \nu_2(n)$ ($\nu_1(n)$ y $\nu_2(n)$ no están correlacionados).
- El objetivo es diseñar un filtro de wiener de forma transversal con dos coeficientes para obtener una estimación de $d(n)$ en sentindo medio cuadrático.
- La varianza de $d(n)$ es

$$\sigma_d^2 = \frac{\sigma_1^2}{1 - a_1^2} = \frac{0.27}{1 - (0.8458)^2} = 0.9486$$

- La salida del canal $x(n)$ es entonces un proceso AR de segundo orden dado por

$$x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) = \nu(n)$$

donde $a_1 = -0.1$ y $a_2 = -0.8$. Notar que $d(n)$ y $x(n)$ son procesos estacionarios en sentido amplio.

- Para obtener el filtro de Wiener es necesaria la matriz correlación $\boldsymbol{R}$ (2×2) asociada a la señal recibida $u(n)$ y el vector de correlación cruzada $\boldsymbol{p}$ (2×1) entre $u(n)$ y $d(n)$.
- La matriz de correlación será

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_x + \boldsymbol{R}_2$$

- Para $\boldsymbol{R}_x$ se tiene que

$$\begin{aligned} r_x(0) &= \sigma_x^2 = \left(\frac{1+a_2}{1-a_2}\right) \frac{\sigma_1^2}{[(1+a_2)^2 - a_1^2]} = 1 \\ r_x(1) &= \frac{-a_1}{1+a_2} = 0.5 \end{aligned}$$

de donde $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.1 \end{bmatrix}$

- Para obtener $\boldsymbol{p}$ es necesario evaluar $E[u(n-k)d(n)]$, para $k = 0, 1$. Sustituyendo $u(n) = x(n) + \nu_2(n)$ en la definición de $p(k)$ se obtiene

$$p(k) = r_x(k) + b_1 r_x(k-1), \quad k = 0, 1$$

de forma que con $b_1 = -0.9458$ se obtiene $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0.5272 \\ -0.4458 \end{bmatrix}$.

- De esta forma es posible obtener el error medio cuadrático

$$J(w_0, w_1) = 0.9486 - 1.0544 w_0 + 0.8916 w_1 + w_0 w_1 + 1.1(w_0^2 + w_1^2)$$

donde $J_{min} = 0.1579$, el filtro de Wiener

$$\boldsymbol{w}_o = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0.8360 \\ -0.7853 \end{bmatrix}$$

y la superfície de desempeño canónica (con $\lambda_1 = 1.6$ y $\lambda_2 = 0.6$) dada por

$$J(\nu_1, \nu_2) = J_{min} + 1.6\nu_1^2 + 0.6\nu_2^2$$

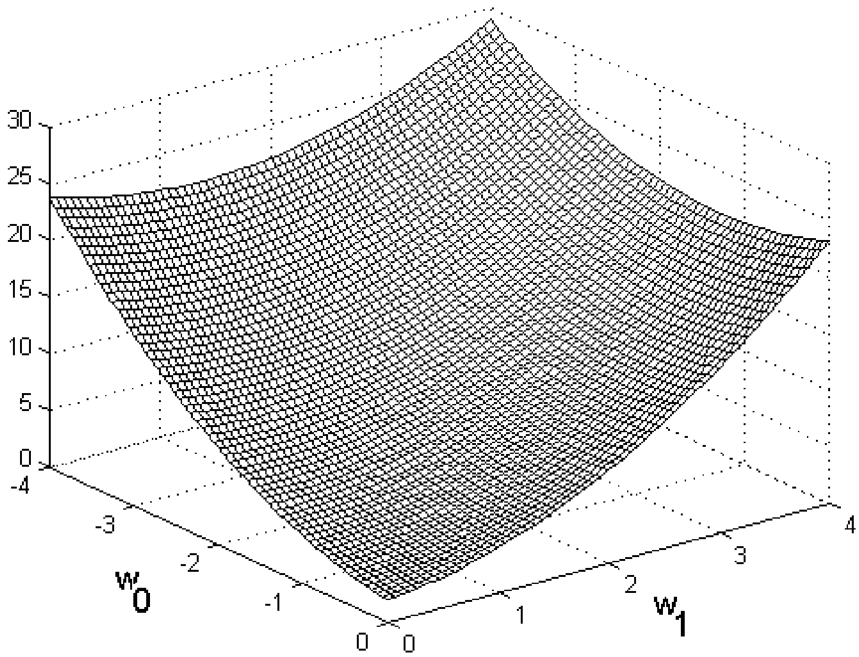


Figura 7: Superfície de error del filtro transversal descripto en el ejemplo.

- El lugar geométrico de ν_2, ν_1 es una **elipse** para un valor fijo de $J - J_{min}$. En particular, la elipse tiene como eje menor $[(J - J_{min}/\lambda_1]^{1/2}$ sobre ν_1 y como eje mayor $[(J - J_{min}/\lambda_2]^{1/2}$ sobre la coordenada ν_2.

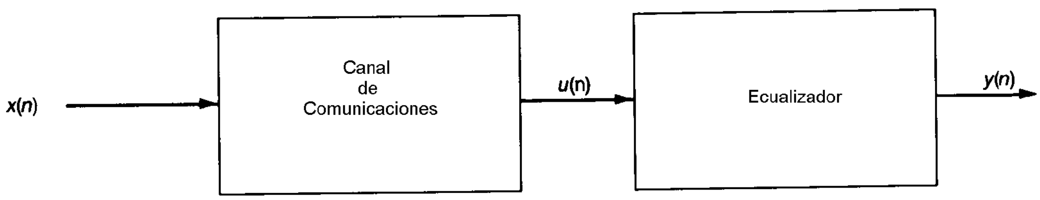
3.6 Ecualización

- Un posible canal para la transmisión de datos digitales es el **canal telefónico**, el cual está caracterizado, en los casos simples, por una alta relación señal a ruido. Sin embargo, una limitación prática clave del canal telefónico es que está **limitado en ancho de banda**.

- En consecuencia, cuando se transmiten datos por medio de modulación de amplitud discreta (PAM) en forma combinada con un esquema lineal de modulación digital (por ejemplo modulación cuaternária digital (QPSK)), el número de niveles detectables que el canal telefónico puede soportar está esencialmente limitado por la **interferencia intersímbolo** (ISI), más que el ruido aditivo.

- Supondremos en la discusión siguiente que el ruido a la salida del canal es despreciable. La ISI ocurre en general asociada a la dispersión del símbolo transmitido por el ancho de banda limitado del canal, lo que resulta en el solapamiento de símbolos adyacentes. Si la ISI no se corrige se pueden producir errores en la detección de los datos recibidos.

- Un método efectivo para combatir la degradación debido a ISI es introducir un **ecualizador** en cascada con el canal, como mostrado en la figura (8). Una estructura simple para esta aplicación es el filtro transversal que se muestra. Por la simetría asociada, el número total de taps del ecualizador se elige igual a $(2N + 1)$.



(a)

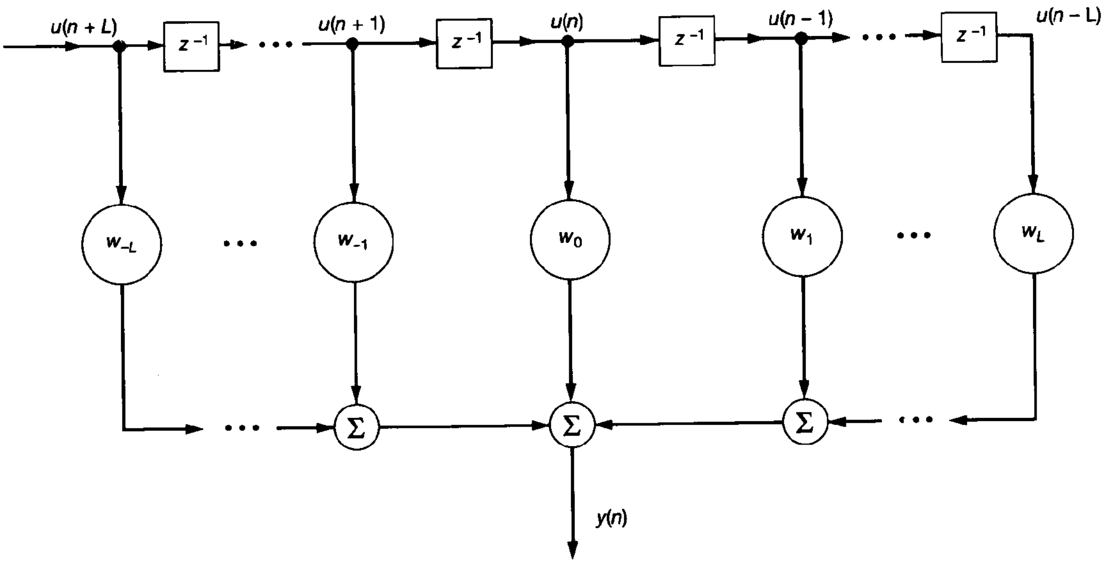


Figura 8: a) Diagrama en bloques de un canal ecualizado, b) implementación del ecualizador con un filtro transversal simétrico.

- La respuesta impulsiva del ecualizador es

$$h(n) = \sum_{k=-N}^{N} h_k \delta(n-k)$$

donde $\delta(n)$ es la función Delta de Dirac.

- En forma similar, la respuesta impulsiva del canal

$$c(n) = \sum_{k} c_k \delta(n-k)$$

- La conexión en serie del canal y ecualizador es

$$w(n) = \sum_{k=-N}^{N} w_k \delta(n-k)$$

donde la secuencia w_n es igual a la convolución de las secuencias c_n y h_n, o sea

$$w_l = \sum_{k=-N}^{N} h_k c_{l-k}, \qquad l = 0, \pm 1, \cdots, \pm N$$

- Supongamos que la secuencia de entrada al canal $u(n)$ sea ruido blanco de media cero y varianza unitária. De esta forma, la matriz correlación $\boldsymbol{R}$ tendrá como elementos

$$r(l) = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

- Para tener en el receptor una señal de respuesta deseada $d(n)$, suponemos disponible en él una versión señal retrasada de $d(n)$, que en particular coincide con la señal a transmitir, o sea $d(n) = u(n)$, donde n corresponde al tap central del ecualizador. De esta forma la correlación cruzada entre la secuencia transmitida $u(n)$ y la respuesta deseada $d(n)$ será

$$p(l) = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N \end{cases}$$

- Usando ahora las ecuaciones de Wiener-Hopf se obtiene

$$w_l = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N \end{cases}$$

ó en forma equivalente

$$\sum_{k=-N}^{N} h_k c_{l-k} = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N \end{cases}$$

- Este sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} c_0 & \cdots & c_{-N+1} & c_{-N} & c_{-N-1} & \cdots & c_{-2N} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ c_{N-1} & \cdots & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \cdots & c_{N+1} \\ c_N & \cdots & c_1 & c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-N} \\ c_{N+1} & \cdots & c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_{-N+1} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ c_{2N} & \cdots & c_{N+1} & c_N & c_{N-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{-N} \\ \vdots \\ h_{-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- En la literatura de comunicaciones este tipo de ecualizador se denomina **zero forcing**, debido a que para un pulso transmitido por el canal el ecualizador restringe la salida del receptor a ser cero para todos los instantes de muestreo excepto para aquel que corresponde al símbolo transmitido.